

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

1. (6) Számítsuk ki az $\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz$ integrál értékét negatív n értékekre.

2. (8) Vezessük le a konstansok variálásának módszerét adó egyenletrendszert az $y'' + py' + qy = f$ másodrendű lineáris differenciálegyenletre.

Név: _____ Gyakvez: _____

Σ :

3. (6) Melyek igazak (I), illetve hamisak (H) az alábbi állítások közül? I válasz esetén adjunk rövid indoklást! Ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”, N válasz esetén adjunk ellenpéldát, vagy olyan plusz feltételt, amely mellett már igaz az állítás, vagy javítsuk ki az állítást. A következő állításokban \mathbf{v} olyan vektor-vektor függvény, melynek minden koordinátafüggvénye diffható minden változó szerint, és az összes parciális derivált folytonos a tér minden pontjában.

a) Ha a \mathbf{v} függvény potenciálos, akkor $\text{rot } \mathbf{v}$ integrálja minden egyszerű zárt görbén 0.

b) Ha \mathbf{v} görbementi integrálja minden egyszerű zárt görbén 0, akkor van olyan u skalárfüggvény, hogy $\nabla u = \mathbf{v}$.

c) Ha \mathbf{v} divergenciája mindenütt 0, akkor \mathbf{v} integrálja minden zárt görbén 0.

4. (10) Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Sima görbe torziója:

b) Egzakt differenciálegyenlet:

c) Komplex változós e -alapú exponenciális függvény:

d) n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszer:

e) Lényeges szingularitás:

5. (4) Legyen f tetszőleges, mindenütt reguláris komplex függvény, a a komplex sík tetszőleges pontja, \mathcal{G} pedig olyan egyszerű zárt görbe, mely a belsejében tartalmazza az a pontot. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) $\frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0$ minden

$n = -1, -2, -3 \dots$ esetén.

b) $\frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$ minden

$n = 1, 2, 3 \dots$ esetén.

c) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z-a)} dz = f(a)$.

d) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{G}} \frac{f(a)}{(z-a)} dz = f(a)$.

d) Számítsuk ki a $\sin(x + iy)$ függvény valós részét (írjuk fel x és y függvényeként valós elemi függvényekkel)!

e) Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{e^{2z}}{z^2 + 2z + 1} dz$ értékét, ha \mathcal{G} a $-2 - i$, $-3 + 2i$ és a 3 pontokat összekötő háromszög.

6. (16=3+2+2+2+2+2+3) Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a) Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$ görbe $t = 1$ paraméterhez tartozó pontjában a torziót!

f) Oldjuk meg az $x' = 2x + 2y$, $y' = x + 3y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ha tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátvektorai $(1, 1)$ és $(-2, 1)$.

b) Az $y'' - 2y' + 2y = x^2$ és az $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin x$ differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

g) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ vektormező felületi integrálját az $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományhoz tartozó $(u, v) \mapsto (u, uv, v)$ felületen.

c) Mi az $x^2 y'' + 7xy' + 5y = 0$ diffegyenlet általános megoldása?