24. fejezet

Komplex függvények

Komplex változós elemi függvények

D 24.1 **Egyváltozós komplex függvény**nek olyan f függvényt nevezünk, amelyre $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbf{C}$ és $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \mathbf{C}$. (Speciálisan, ha $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbf{R}$ és $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \mathbf{R}$, akkor az egyváltozós valós függvény fogalmához jutunk (**D 8.1**). Ebben a fejezetben **komplex függvény**en mindig egyváltozós komplex függvényt értünk, többváltozós komplex függvényekkel nem foglakozunk.)

M 24.2 A komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza metrikus teret alkot a $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ $(z_1, z_2 \in \mathbf{C})$ távolságfüggvénnyel (l. **7.34.** feladatot). Ezért komplex függvényekre a **határérték** és a **folytonosság** fogalmát pontosan úgy definiáljuk, mint egyváltozós valós függvényekre
(l. a **8.** fejezetet).

M 24.3 Ha a z változót és a $w = f(z)$ függvényértéket felbontjuk valós és képzetes részre (**D 6.1**), vagyis a $z = x + iy$ és $w = u + iv \quad (x, y, u, v \in \mathbf{R})$ alakban veszük fel, akkor az $u + iv = f(x + iy)$ előállítást kapjuk. Bontsuk fel az egyenlet jobb oldalán lévő kifejezést is valós és képzetes részre:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ebből látható, hogy az $f(x+iy)$ komplex függvény valós és képzetes része egy-egy kétváltozós valós függvény (**D 8.1**).

J 24.4 Szokás szerint a $z = x + iy$ komplex szám valós részét $\mathrm{Re}\, z$-vel, képzetes részét $\mathrm{Im}\, z$-vel jelöljük, azaz $x = \mathrm{Re}\, z$ és $y = \mathrm{Im}\, z$ (**D 6.1**).

D 24.5 Néhány fontos **komplex változós elemi függvény** definíciója:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

T 24.6 Tetszőleges z és w komplex számokra igazak az alábbi összefüggések:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (\textbf{Euler-formula}),$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \mathrm{ch}\, iz \quad (\cos iz = \mathrm{ch}\, z),$$

$$i \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \operatorname{sh} iz \quad (\sin iz = i \operatorname{sh} z),$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

T 24.7 Az e^z függvény $2\pi i$, a $\sin z$ és a $\cos z$ függvény pedig 2π egész számú többszörösei szerint periodikus, más periódusuk nincs.

D 24.8 A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban (**D 6.12**) adott komplex szám az Euler-formula segítségével átírható a $z = re^{i\varphi}$ **exponenciális alak**ba.

D 24.9 A $z \neq 0$ komplex szám e **alapú** vagy **természetes alapú logaritmus**án értünk minden olyan w komplex számot, amely kielégíti az $e^w = z$ egyenletet. Jelölése: $w = \ln z$.

T 24.10 Ha a $z \neq 0$ komplex számot a $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakban adjuk meg, akkor $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) \quad (k \in \mathbf{Z})$, ahol $\ln r$ az r pozitív valós szám valós logaritmusát jelöli.

D 24.11 Az $\ln z$ **főértéké**nek nevezzük az $\ln r + i\varphi$ komplex számot, ha $0 \leq \varphi < 2\pi \quad (k = 0)$.

D 24.12 Tetszőleges w és $z \neq 0$ komplex számokra a z^w **hatvány**t a

$$z^w = e^{w \ln z}$$

képlettel értelmezzük. A z^w hatványnak az $\ln z$ logaritmus főértékével számított értékét a **hatvány főértéké**nek mondjuk. Megjegyezzük, hogy a **D 24.5**-ben definiált e^z komplex változós exponenciális függvény értéke a $z = z_0$ helyen egyenlő az e^{z_0} (komplex) hatvány főértékével.

Feladatok

Adjuk meg azokat az u és v kétváltozós valós függvényeket, amelyekkel az alábbi f komplex függvények $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ alakban írhatók (**1. – 11.** feladatok):

1.• $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, **2.** $f(z) = \overline{z}^2$, **3.** $f(z) = z + \overline{z}$,

4. $f(z) = z\overline{z}$, **5.** $f(z) = \overline{z} - iz^2$, **6.** $f(z) = z^2 + i$,

7. $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z}$, **8.** $f(z) = \dfrac{z^3}{|z|^2}$, **9.** $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$,

10. $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$, **11.**• $f(z) = e^{-z}$.

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely z_1 és z_2 komplex számra:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

13. Bizonyítsuk be, hogy bármely z_1 és z_2 komplex számra:

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

14. Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in \mathbf{R}$, akkor

$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

15. Adjuk meg a $\operatorname{sh} \overline{z}$ függvény valós és képzetes részét.

16. Adjuk meg a $\operatorname{ch}(z-i)$ komplex függvény u valós és v képzetes részét.

17. Adjuk meg a $\operatorname{tg} z$ komplex függvény u valós és v képzetes részét.

18. Igazoljuk, hogy $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ és $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$.

19.$^\triangleright$ Határozzuk meg mindazokat a z komplex számokat, amelyekre $e^{i\overline{z}} = \overline{e^{iz}}$.

20. Adjuk meg mindazokat a z komplex számokat, amelyekre az e^z függvény értéke valós.

21. Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

A következő komplex számokat írjuk fel algebrai alakban (**D 6.1**):

22.$^\bullet$ $\cos(-i)$, **23.** $\operatorname{tg} \dfrac{i\pi}{2}$, **24.** $\sin(3-4i)$,

25. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$, **26.** $\operatorname{sh}\left(1 + i\dfrac{\pi}{2}\right)$, **27.** $\operatorname{ch}\left(\ln 3 + i\dfrac{\pi}{4}\right)$,

28. $\operatorname{th}\left(\ln 2 + i\dfrac{\pi}{2}\right)$, **29.** $e^{1 - i \arcsin \frac{1}{3}}$, **30.** $e^{\ln 2 + i \arccos \cos 5}$

Számítsuk ki a következő komplex számok komplex logaritmusait. Adjuk meg a logaritmusok főértékeit:

31.$^\bullet$ $-5+5i$, **32.** 1, **33.** i,

34. $-e$.

A következő komplex hatványokat adjuk meg algebrai alakban, és határozzuk meg főértéküket:

35.$^\bullet$ $(1+i)^i$, **36.** i^{i+1}, **37.** e^{5-i},

38. $(1-i)^e$, **39.** 2^{5i}, **40.** $e^{\pi i}$,

41. $(6-3i)^{2i+1}$, **42.** 1^{-i}, **43.** $(-1)^{\sqrt{2}}$,

44. $(-3+4i)^{i+1}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a z ismeretlenre a komplex számok halmazában:

45.$^\bullet$ $e^{-z} + 1 = 0$, **46.** $e^z + i = 0$, **47.** $\sin z = \pi i$,

48. $\cos z = -2$, **49.** $\sin z = -2$, **50.** $\sin z = 0$,

51. $\cos z = 0$, **52.** $\operatorname{tg} z = -1$, **53.** $\operatorname{ctg} z = -i$,

54. $\operatorname{ch} z = -2$, **55.** $\operatorname{th} z = i$, **56.** $\operatorname{th} z = 1$,

57.$^\bullet$ $\cos i\overline{z} = \overline{\cos iz}$, **58.** $\sin i\overline{z} = \overline{\sin iz}$.

Az alábbi feladatok mindegyikében határozzuk meg azokat a z komplex számokat, amelyekre az egyenletben szereplő komplex hatvány minden értékére fennáll az egyenlőség:

59.$^\triangleright$ $5^z = 1$, **60.** $1^z = 2$, **61.** $2^z = -1$,

62. $5^z = 5$, **63.**★ $z^z = z$.

Az alábbi feladatok mindegyikében határozzuk meg azokat a z komplex számokat, amelyekre az egyenletben szereplő komplex hatvány legalább egy értékére fennáll az egyenlőség:

64. $5^z = 1$, **65.** $1^z = 2$, **66.** $2^z = -1$,
67. $5^z = 5$.

Számítsuk ki a következő határértékeket:

68. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$, **69.** $\displaystyle\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$,

70. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$, **71.** $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z\left(z - e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}{z^3 + 1}$.

72.▷ Bizonyítsuk be, hogy az f komplex függvény a z_0 helyen akkor és csak akkor folytonos, ha ezen a helyen a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvények folytonosak.

Igazoljuk, hogy az alábbi komplex függvények a komplex számsík minden pontjában folytonosak (**73.– 74.**):

73. $|z|$, **74.** $az + b$; $a, b \in \mathbf{C}$.

Értelmezzük az $f(0)$ függvényértéket úgy, hogy a következő függvények a $z = 0$ helyen folytonosak legyenek:

75. $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$, **76.** $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$,

77. $e^{-\frac{1}{|z|}}$, **78.** $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

79. Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ nem létezik.

80. Legyen $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\lim_{z\to 0} f(z)$ nem létezik.

Komplex függvények differenciálása

M 24.13 Egyváltozós komplex függvényekre a differencálhatóság definíciója ugyanaz, mint egyváltozós valós függvényekre. A függvények összegére, különbségére, szorzatára, hányadosára, inverzére és az összetett függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok is megegyeznek (I. 9.fejezet).

T 24.14 Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)},$$

azaz az (x_0, y_0) számpár kielégíti a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert.

M 24.15 Ha az u valós és v képzetes rész differenciálható (például, ha u és v parciális differenciálhányadosai folytonosak (**T 14.9**)), akkor igaz az előbbi tétel megfordítása is:

T 24.16 Ha a komplex $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x + iy)$ függvény u valós és v képzetes része is differenciálható az (x_0, y_0) helyen, továbbá az (x_0, y_0) számpár kielégíti a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert, akkor f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban.

T 24.17 Ha $z = re^{i\varphi}$ exponencális alakban (**D 24.8**) van adva, azaz $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$, akkor

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right),$$

feltéve, hogy a felírt differenciálhányadosok léteznek. Így a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

D 24.18 A komplex f függvényt a z_0 pontban **reguláris**nak (**holomorf**nak) mondjuk, ha a függvény a z_0 pont valamely teljes környezetében differenciálható. Az f-et a T ponthalmazon regulárisnak nevezzük, ha f a T minden pontjában reguláris. Azon pontok halmazát, amelyekben f reguláris, f **regularitási tartomány**ának nevezzük.

T 24.19 Ha az f komplex függvény egy összefüggő nyílt T halmazon reguláris, akkor T minden pontjában akárhányszor differenciálható. (A komplex számsík egy T ponthalmazát **összefüggő**nek nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető a T-ben haladó töröttvonallal. A nyílt halmaz definícióját **D 7.12**-ben adtuk meg. Megjegyezzük, hogy összefüggő nyílt halmazon a differenciálhatóság és a regularitás ugyanazt jelenti.)

M 24.20 Az előbbi tételből következik, hogy egy összefüggő nyílt T halmazon reguláris f függvény u valós és v képzetes részének összes parciális differenciálhányadosai léteznek és folytonosak. A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletekből tovább differenciálva kapható, hogy a függvény valós és képzetes része eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{és} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenleteknek, azaz u és v úgynevezett **harmonikus függvények**. Úgy is mondjuk, hogy u és v egymás **harmonikus társai**. Kimutatható, hogy egy egyszeresen összefüggő nyílt halmazon bármely harmonikus függvénynek léteznek harmonikus társai, és ezek csak állandóban különböznek egymástól. Ez azt jelenti, hogy egyszeresen összefüggő nyílt halmazon bármely harmonikus függvény tekinthető egy, ezen a halmazon reguláris komplex függvény valós vagy képzetes részének. (**Egyszeresen összefüggő**nek nevezzük a komplex számsík összefüggő nyílt T halmazát, ha bármely önmagát nem metsző T-beli zárt görbe által határolt síkidom is T-ben fekszik.)

Feladatok

Vizsgáljuk meg differenciálhatóság, illetve regularitás szempontjából az alábbi komplex függvényeket:

81.• $y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2); \quad x, y \in \mathbf{R}$,

82. $\overline{z}$, **83.•** $|z|$, **84.** $\operatorname{Re} z$,

85. $z \operatorname{Im} z$, **86.** $z \operatorname{Re} z$, **87.•** $\cos \overline{z}$,

88. $z - \overline{z}$, **89.** $|z-1|^2$, **90.** $z^2|z|$,

91. $e^x(\cos y - i \sin y); \quad x, y \in \mathbf{R}$,

92. ze^z, **93.•** $|z|\overline{z}$, **94.▷** $|z| \operatorname{Re} z$,

95. e^{z^2}.

Bizonyítsuk be, hogy a következő függvények az értelmezési tartományukon regulárisak. Adjuk meg a függvények deriváltját.

96.• $e^{cz}; \quad c \in \mathbf{R}$, **97.•** $\ln z$, **98.** $\ln z^2$,

99. $\operatorname{sh} z$, **100.** $\operatorname{ch} z$, **101.▷** $z^n; \quad n \in \mathbf{Z}$,

102. $\cos z$, **103.** $\sin z$, **104.** $\sin \dfrac{z}{3}$,

105. $\operatorname{tg} z$, **106.** $\dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$, **107.** $\dfrac{1}{z}$,

108.▷ $\dfrac{1+z}{1-z}$, **109.** $z \cdot e^{-z}$, **110.** $\dfrac{z \cos z}{1+z^2}$,

111. $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$, **112.** $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$, **113.** $\dfrac{e^z}{z}$.

Vizsgáljuk meg, hogy harmonikusak-e az alábbi függvények az értelmezési tartományukon:

114. $u = e^{x^2-y^2}$, **115.** $u = \operatorname{ch} x \cos y$, **116.** $u = x^2 + 2x - y^2$,

117. $u = 2e^x \cos y$, **118.** $u = \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{y}\right)^{-1}$, **119.** $u = \ln(x^2+y^2)$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós függvények lehetnek-e valamely f komplex függvény valós vagy valamely g komplex függvény képzetes részei; ha igen, akkor határozzuk meg f, illetve g deriváltját:

120.▷ $u = x^2 - y^2 + 2xy$, **121.** $u = x^2$,

122. $u = \dfrac{y(x^2+1)}{2}$, **123.** $u = 3(x^2-y^2) + 2y + 1$,

124. $u = \ln(x^2+y^2)$, **125.** $u = e^{-y} \sin x$,

126. $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Határozzuk meg azt az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ komplex függvényt, amely az értelmezési tartományán reguláris, a z_0 pontban a megadott $w_0 = f(z_0)$ értéket veszi fel, és amelynek az u valós vagy a v képzetes része a megadott kétváltozós valós függvény:

127.$^\bullet$ $u = e^x \sin y$; $f(0) = i$,

128. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$,

129.$^\bullet$ $v = 2y(x + 1)$; $f(i) = 2i - 1$,

130. $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$; $f(1) = -2$,

131. $u = x^3 - 3xy^2$; $f(i + 1) = 2i$,

132. $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; $f(i) = \dfrac{\pi}{2}$,

133. $u = x^2 - y^2 + xy$; $f(-1) = 1$,

134. $v = xy$; $f(i - 1) = -i$.

Komplex függvények integrálása

M 24.21 Legyen f a komplex számsík valamely irányított rektifikálható (**D 13.19**) $\mathcal{G}$ görbeívén értelmezett komplex függvény. A vektor-vektorfüggvények skalárértékű görbementi integráljához (**D 18.9**) hasonlóan értelmezzük az f függvény $\mathcal{G}$ görbementi integrálját. (Annyi a különbség, hogy a definícióban vektorok skaláris szorzata helyett komplex számok szorzata szerepel.) A görbementi integrál alaptulajdonságai komplex görbementi integrálokra is érvényesek (l. Szász G., Matematika II., 364. – 367. oldalt). Megállapodunk abban, hogy zárt $\mathcal{G}$ görbe esetén $\oint f(z)\,dz$ a komplex számsíkon értelmezett pozitív forgási irány szerinti integrált jelentse.

T 24.22 Legyen az f komplex függvény integrálható a $\mathcal{G}$ rektifikálható görbeíven. Ha a $\mathcal{G}$ egyenlete $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2,\quad t_1, t, t_2 \in \mathbf{R})$ alakú, mégpedig $z(t_1)$ a görbe kezdőpontja, $z(t_2)$ a görbe végpontja és a z függvény t szerinti deriváltja folytonos a t_1 és t_2 által határolt intervallumon, akkor

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)\,dt.$$

T 24.23 Ha az f komplex függvény valamely T ponthalmazon folytonos, akkor T belsejében fekvő bármely rektifikálható görbeíven integrálható.

T 24.24 Cauchy-féle integráltétel: Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon (**M 24.20**) reguláris (**D 24.18**), akkor T-ben fekvő minden zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus. (Ez azt jelenti, hogy ha A és B a T tetszőleges két pontja, akkor f-nek bármely A kezdőpontú és B végpontú T-ben haladó rektifikálható görbeíven vett integrálja megegyezik.)

T 24.25 Morera-tétele: Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon folytonos, és f-nek minden T-ben fekvő zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus, akkor f a T halmazon reguláris. (A **Cauchy-féle integráltétel** megfordítása.)

T 24.26 Legyen az f komplex függvény folytonos az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon. Az f-nek akkor és csak akkor van T-ben primitív függvénye (**D 12.1**), ha f reguláris a T halmazon. Ebben az esetben f-nek egy primitív függvénye megadható $\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = F(z)$ alakban, ahol z_0 a T tetszőleges rögzített pontja, és az integrálás tetszőleges olyan T-beli rektifikálható görbe mentén történik, amelynek kezdőpontja z_0 és végpontja z.

T 24.27 Ha F a reguláris f komplex függvény primitív függvénye a T összefüggő nyílt halmazon (**T 24.19**), akkor bármely a kezdőpontú és b végpontú T-beli rektifikálható $\mathcal{G}$ görbére:

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = F(b) - F(a) \quad (\text{ Newton-Leibniz-formula})$$

(l. **T 13.4**).

T 24.28 Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két olyan zárt rektifikálható görbe, hogy a $\mathcal{G}_2$ görbe a $\mathcal{G}_1$ belsejében fekszik. Ha az f komplex függvény a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ által határolt zárt gyűrűtartományt magában foglaló valamely ponthalmazon reguláris, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}_1} f(z)\,dz = \oint_{\mathcal{G}_2} f(z)\,dz.$$

M 24.29 Az előző tétel általánosítható a $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ zárt rektifikálható görbékre, ha a $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ görbék $\mathcal{G}$ belsejében fekszenek, de kölcsönösen egymás külsejében:

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} f(z)\,dz + \oint_{\mathcal{G}_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\mathcal{G}_n} f(z)\,dz.$$

T 24.30 Cauchy-féle integrálformula: Ha az f komplex függvény differenciálható (reguláris) az összefüggő nyílt T ponthalmazon, akkor T minden z_0 pontjára

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z - z_0)},$$

ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan T-ben haladó, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és z_0 a $\mathcal{G}$ belsejében van.

T 24.31 Cauchy-féle integrálformulák differenciálhányadosokra: Ha az f komplex függvény differenciálható (reguláris) az összefüggő nyílt T ponthalmazon, akkor akárhányszor differenciálható T-ben (**T 24.19**), és T minden z_0 pontjára

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}^+),$$

ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan T-ben haladó, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és z_0 $\mathcal{G}$ belsejében van. (Megjegyezzük, hogy $n = 0$ esetben az előző tételt kapjuk.)

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi f komplex függvények integrálját az adott irányított $\mathcal{G}$ görbe mentén:

135.$^\bullet$ $f(z) = \operatorname{Re} z$; $\mathcal{G}$ a 0 kezdőpontú, $1 + i$ végpontú szakasz,

136.$^\triangleright$ $f(z) = |z|\overline{z}$; $\mathcal{G}$ a valós tengely feletti 0 középpontú és 1 sugarú félkör pozitív forgásiránnyal,

137.$^\triangleright$ $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}$; $\mathcal{G}$ az 1, 2, $2+i$, $1+i$ csúcspontú négyzet pozitív forgásiránnyal,

138.$^\bullet$ $f(z) = e^z$; $\mathcal{G}$ a valós tengely alatti 0 középpontú 2 sugarú félkör pozitív forgásiránnyal,

139.• $f(z) = 3z + 1$; $\mathcal{G}$ a $0,\ 1,\ 1+i,\ i$ csúcspontú négyzet pozitív körüljárási iránnyal,

140. $f(z) = iz^2 - 2\overline{z}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör azon íve negatív forgásiránnyal, amelyre $\operatorname{Re} z \geq 0$ és $\operatorname{Im} z \geq 0$,

141. $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2)$; $\mathcal{G}$ az $y = 2x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ egyenletű parabola, ahol $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, és az irány x növekedésének iránya,

142. $f(z) = ze^{z^2}$; $\mathcal{G}$ az a körív pozitív forgásiránnyal, amelyre $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$,

143. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; $\mathcal{G}$ az a körív pozitív forgásiránnyal, amelyre $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$,

144. $f(z) = 3z^2 + 2z$; $\mathcal{G}$ az $1-i,\ 2-i,\ 2+i$ csúcspontú töröttvonal, $1-i$ kezdőponttal és $2+i$ végponttal.

Számítsuk a következő komplex integrálokat a $\mathcal{G}$ zárt görbe mentén a Cauchy-féle integrálformulák (**T 24.30** és **T 24.31**) segítségével:

145.• $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$; $\mathcal{G}$ az 1 középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör,

146.• $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe, amely belsejében tartalmazza a 0 pontot, és önmagát nem metszi át,

147. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| = 1$ egyenletű kör,

148.• $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4-z^3}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-2| = 3$ egyenletű kör,

149. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{1+z^2}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör,

150. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z+1| = \frac{3}{4}$ egyenletű kör,

151. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| = \frac{3}{2}$ egyenletű kör,

152. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^3}\,dz$; $\mathcal{G}$ az $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis,

153. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$; $\mathcal{G}$ az $\frac{i-1}{2},\ -\frac{i+1}{2},\ 2$ csúcspontú háromszög,

154. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{sh} z}{z^5-z^4-z+1}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| + |z+i| = 3$ egyenletű ellipszis,

155. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{6}}{z^3-2iz^2-z}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|4z+i| = 6$ egyenletű görbe,

156. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{(z^2-z)(z^2-2iz-1)}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z+1| = \frac{3}{2}$ egyenletű kör.

Laurent-sorok

T 24.32 Ha az f komplex függvény reguláris a z_0 pont valamely E teljes környezetében, akkor minden $z \in E$ esetén:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

azaz az f függvény az E teljes környezetben z_0 körül Taylor-sorba (**D 23.18**) fejthető.

D 24.33 Legyen $\mathcal{K}_1$, illetve $\mathcal{K}_2$ a z_0 középpontú r_1, illetve r_2 sugarú kör a komplex számsíkon és $r_1 < r_2$. (Engedjük meg az $r_1 = 0$ és az $r_2 = \infty$ eseteket is. Az előbbi esetben $\mathcal{K}_1$ jelentse a z_0 pontot, az utóbbi esetben pedig $\mathcal{K}_2$ a komplex számsíkot.) A z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-**körgyűrű**n értjük az $r_1 < |z - z_0| < r_2$ feltételt kielégítő z pontok halmazát.

D 24.34 Jelöljük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{-n-1}$ és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ sorok összegsorát (**T 22.29**) a következő módon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \begin{cases} a_{|n|-1}, & \text{ha } n < 0, \\ b_n, & \text{ha } n \geq 0. \end{cases}$$

Az így kapott komplex sort z_0 körüli **Laurent-sor**nak nevezzük. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{-n-1}$ sort a Laurent-sor **főrész**ének, a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ sort pedig a Laurent-sor **reguláris rész**ének nevezzük. (A Laurent-sor fogalma a komplex hatványsor (**D 23.6**) általánosítása. Ha ugyanis minden negatív egész n-re $c_n = 0$, akkor a Laurent-sor hatványsorba megy át.)

T 24.35 Ha a $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ Laurent-sornak van konvergenciapontja (**D 23.3**), akkor van olyan z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrű, amelynek minden pontjában a sor abszolút konvergens és minden külső pontjában (**D 7.12**) a sor divergens. (A tétel lényegében Abel tételének (**T 23.7** és **M 23.8**) általánosítása.)

T 24.36 Ha az f komplex függvény reguláris a z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrűben, akkor a körgyűrű tetszőleges z pontjában érvényes az

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

úgynevezett (z_0 körüli) **Laurent-sorfejtés**, amelynek együtthatóit a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$

képletek szolgáltatják, ahol $\mathcal{G}$ a körgyűrűben haladó tetszőleges, önmagát át nem metsző olyan rektifikálható zárt görbe, amely a z_0 pontot megkerüli. (A sort a függvény z_0 körüli **Laurent-sor**ának nevezzük.) A $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrűben konvergens (z_0 körüli) Laurent-sor összegfüggvényének (**D 23.4**) Laurent-sora az eredeti Laurent-sor.

M 24.37 Ha f a $\mathcal{K}_2$ kör belsejében reguláris, akkor ott a Laurent-sora megegyezik a z_0 körüli Taylor-sorával (**D 23.18**).

M 24.38 Komplex hatványsorokra is érvényes a hatványsorok tagonkénti differenciálására, illetve integrálására vonatkozó tétel (**T 23.10**), nyílt intervallum helyett nyílt körlapra, a valós számegyenes helyett a komplex számsíkra.

D 24.39 A z_0 pontot az f komplex függvény **izolált szinguláris helyé**nek nevezzük, ha f a z_0 pontban nem reguláris, de van z_0-nak olyan környezete, amelyben f reguláris.
A z_0 izolált szinguláris helyet f **megszüntethető szingularitás**ának nevezzük, ha z_0 körüli Laurent-sorában minden $n < 0$ esetén $c_n = 0$, és f (k-**adrendű**) **pólus**ának, ha z_0 körüli Laurent sorában $c_{-k} \neq 0 \quad (k \in \mathbf{N}^+)$, de minden $n > k$ esetén $c_{-n} = 0$. Ha f z_0 izolált szinguláris helye f-nek nem megszüntethető szingularitása és nem pólusa, akkor z_0-t f **lényeges szingularitás**ának hívjuk.

T 24.40 Az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor megszüntethető szingularitása f-nek, ha $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ létezik.

T 24.41 Az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor k-adrendű pólusa f-nek, ha van olyan g komplex függvény, amely z_0 valamely teljes környezetében reguláris, $g(z_0) \neq 0$ és $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, azaz ha z_0 az $\dfrac{1}{f}$ függvénynek k-szoros zérushelye (ennek definíciója **T 10.4**-ben található).

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények z_0 körüli Taylor-sorát. Adjuk meg z_0-nak azt a környezetét, ahol a Taylor-sor még előállítja a függvényt (a feladatokban logaritmuson a komplex logaritmus főértéke (**D 24.11**) értendő).

157.• $\ln(1+z); \quad z_0 = 0,$

158. $\ln \dfrac{1+z}{1-z}; \quad z_0 = 0,$

159. $\sin z; \quad z_0 = \frac{\pi}{4},$

160.▷ $\dfrac{1}{1+z}; \quad z_0 = 1.$

Állapítsuk meg az alábbi függvények izolált szinguláris helyeit és azok típusát:

161. $\dfrac{e^z - 1}{z},$

162. $e^{\frac{1}{z}},$

163. $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4},$

164. $\dfrac{1}{z(z-1)^3},$

165. $\dfrac{1}{(2\sin z - 1)^2},$

166. $\dfrac{z}{e^{\frac{1}{z}} - 1},$

167. $\cos \dfrac{1}{z+2i},$

168. $\dfrac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1},$

169. $\dfrac{\sin z}{z^5}.$

Határozzuk meg az alábbi függvények izolált szinguláris helyeit és azok körüli Laurent-sorát. Adjuk meg a Laurent-sor K konvergenciatartományát.

170.• $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, **171.** $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$, **172.** $(z-3)\cos\dfrac{1}{z+2}$,

173. $\dfrac{1}{z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$, **174.** $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$, **175.** $\dfrac{1-\cos z}{z}$,

176.• $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, **177.**• $\dfrac{z}{(z+1)^3}$, **178.**• $\dfrac{1}{z(1-z)}$,

179.⋆ $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$.

A következő feladatokban határozzuk meg az $r_1 < |z-z_0| < r_2$ feltétellel megadott körgyűrűk (**D 24.33**) pontjaiban az f komplex függvény z_0 körüli Laurent-sorát:

180.• $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$; $\quad 1 < |z| < 3, \quad 3 < |z| (< \infty),$
$0 < |z+1| < 2, \quad (0 <)|z| < 1,$

181. $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$; $\quad |z| < 3, \quad |z| > 3,$

182. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$; $\quad |z| < 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad 2 < |z|, \quad 1 < |z-1|,$
$0 < |z-2| < 1,$

183.▷ $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$; $\quad |z| < 1, \quad |z| > 1, \quad |z-3| < \sqrt{10}, \quad |z-3| > \sqrt{10},$

184. $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$; $\quad |z| < 2, \quad |z| > 2,$

Reziduum-tétel

D 24.42 Ha az f komplex függvény z_0 körül Laurent-sora létezik (**T 24.35**), akkor a sor c_{-1} együtthatóját az f függvény z_0-hoz tartozó **reziduum**ának nevezzük. Jelölése: $c_{-1} = \operatorname{Res}(z_0)$. Ha z_0 az f reguláris pontja, akkor $\operatorname{Res}(z_0) = 0$.

T 24.43 Reziduum-tétel: Ha az f komplex függvény reguláris az önmagát át nem metsző, rektifikálható zárt $\mathcal{G}$ görbén és, véges sok $z_1, z_2, \dots, z_k$ izolált szinguláris pont kivételével, a $\mathcal{G}$ belsejében is, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(z_1) + \operatorname{Res}(z_2) + \cdots + \operatorname{Res}(z_k)\right).$$

(Megjegyezzük, hogy a reziduum-tétel a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) általánosítása. Ha ugyanis az f komplex függvény reguláris a $\mathcal{G}$ görbén és a $\mathcal{G}$ belsejében is, akkor a reziduum-tételből is következik, hogy az integrál értéke 0.)

T 24.44 Ha az f komplex függvénynek a z_0 helyen elsőrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname{Res}(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Speciálisan, ha a g és h komplex függvények regulárisak z_0 valamely E teljes környezetében, továbbá $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ és $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ $(z \in E)$, akkor

$$\mathrm{Res}(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

T 24.45 Ha az f komplex függvénynek a z_0 helyen k-adrendű pólusa van, akkor

$$\mathrm{Res}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big)^{(k-1)}.$$

Feladatok

Számítsuk ki a következő függvények izolált szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

185.• $\dfrac{e^z - 1}{z^3}$, **186.** $e^{\frac{1}{z}}$, **187.** $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$,

188.• $\dfrac{e^{iz}}{z^2+9}$, **189.** $\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^3}$, **190.**• $\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}$,

191. $\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$, **192.** $\cos \dfrac{1}{z} + z^3$, **193.** $z^2 \sin \dfrac{1}{z}$.

Számítsuk a következő függvények komplex integráljait a $\mathcal{G}$ zárt görbe mentén a reziduum-tétel (**T 24.43**) segítségével:

194.• $\dfrac{e^z}{z^2-1}$; $\mathcal{G}$ a $|z-\sqrt{3}|+|z+\sqrt{3}| = 4$ egyenletű ellipszis pozitív forgásiránnyal,

195. $\dfrac{z+1}{\sin iz}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 7$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

196. $\dfrac{1}{z^4+1}$; $\mathcal{G}$ a $|z-1| = 1$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

197. $\dfrac{\sin z}{z^2+9}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 4$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

198. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = r(>1)$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

199. $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^5}$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe pozitív forgásiránnyal, amely belsejében tartalmazza a 0 pontot, és önmagát nem metszi át (l. a **146.** feladatot!),

200. $\dfrac{e^{2z}}{z^3-1}$; $\mathcal{G}$ az $\frac{i-1}{2}$, $-\frac{i+1}{2}$, 2 csúcspontú háromszög pozitív forgásiránnyal (l. a **153.** feladatot!),

201. $\sin \frac{1}{z}$; $\mathcal{G}$: a $|z| = r(>0)$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

202. $e^{-\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z}$; $\mathcal{G}$: a $|z| = 1$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

203. $(z-3)\cos\dfrac{1}{z+2}$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe negatív forgásiránnyal, amely belsejében tartalmazza a -2 pontot és önmagát nem metszi át.

Valós integrálok kiszámítása komplex integrálokkal

M 24.46 Valós integrálok kiszámítására gyakran jól használhatók komplex integrálok. Ebben a részben erre mutatunk néhány módszert. Például a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) és a reziduum-tétel (**T 24.43**) bizonyos valós integrálok kiszámítására is alkalmazható. Improprius integrálok (**D 13.6**) kiszámításához felhasználjuk a következő egyenlőtlenséget is:

T 24.47 Ha a komplex f függvény a h hosszúságú $\mathcal{G}$ görbeíven integrálható, és a $\mathcal{G}$ minden pontjában $|f(z)| \le m$, akkor $\left|\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz\right| \le mh$.

M 24.48 Az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$ típusú improprius integrálok kiszámítását bizonyos esetekben komplex integrál kiszámítására vezethetjük vissza. Tegyük fel, hogy a $g(z)$ $(z = x+iy,\ x,y\in\mathbf{R})$ komplex változós függvény olyan, hogy ha $z = x \quad (y=0)$, akkor $\operatorname{Re} g(x) = f(x)$ vagy $\operatorname{Im} g(x) = f(x)$. A valós tengely $-r$ és r közé eső szakaszát egészítsük ki a komplex számsíkon egy alkalmas $\mathcal{G}_1$ görbeívvel zárt $\mathcal{G}$ görbévé (pozitív forgásiránnyal) olyan módon, hogy a $g(z)$ függvénynek a $\mathcal{G}_1$ kiegészítő görbeíven vett integrálját, vagy ennek határértékét $r \longrightarrow \infty$ esetben meg tudjuk adni. Ha a $\mathcal{G}$ zárt görbe és belseje $g(z)$ regularitási tartományában (**D 24.18**) van, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} g(x)\,dx = -\lim_{r\to\infty}\int_{\mathcal{G}_1} g(z)\,dz,$$

amiből $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ vagy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$. Ha az $g(z)$ függvénynek izolált szinguláris helyei is vannak $\mathcal{G}$ belsejében, akkor a reziduum-tételt (**T 24.43**) alkalmazzuk. (Bizonyos $\displaystyle\int_{-\infty}^{r} f(x)\,dx$ és $\displaystyle\int_{r}^{\infty} f(x)\,dx$ típusú improprius integrálok hasonlóan számíthatók ki.) Ez a módszer elég sokszor jól alkalmazható például a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos ax\,dx$ és $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin ax\,dx \quad (a\in\mathbf{R})$ típusú integrálok kiszámítására, ahol $R(x)$ racionális törtfüggvény (**D 10.1**). Természetesen nem minden ilyen típusú függvény improprius integrálja számítható ki ezzel a módszerrel, vagy csak célszerűen választott görbék mentén integrálva jutunk célhoz (l. például a **209.** feladat megoldását!).

P 24.49 Az előző megjegyzés elején mondottak alapján számítsuk ki a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$ improprius integrált! Ehhez vegyük segítségül a $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ függvényt. A $\mathcal{G}$ legyen a $[-r,r]$ intervallumból és a 0 középpontú r sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörből álló zárt görbe pozitív irányítással. Ha $a < r$, akkor a $\mathcal{G}$ belsejébe esik a függvény ai elsőrendű pólusa, így a reziduumtételt (**T 24.43**) alkalmazva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = \oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(ai) - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz$$

$(z = x + iy)$. A **T 24.44** tétel szerint:

$$\operatorname{Res}(ai) = \lim_{z\to ai} \frac{e^{iz}}{z+ai} = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Mivel valós x-re $\left|e^{ix}\right| = 1$, ezért

$$|e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}||e^{-y}| = e^{-y},$$

és így az $|z| = r \ (> 0) \quad (y = \operatorname{Im} z \geq 0)$ egyenletű félkör pontjaiban

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right| = \frac{1}{|z|^2}\left|\frac{1}{e^y\left(1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right)}\right| \leq \frac{1}{r^2}\cdot\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right|.$$

A félkör pontjaira a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$ trigonometrikus alakot (**D 6.12**) használva:

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right| = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{a(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r}\right)^2}\right) = 1$$

(minden φ értékre). Ez azt jelenti, hogy bármely $c > 1$ valós számhoz van olyan $r_0 > 0$, hogy ha $r > r_0$, akkor az $\frac{1}{r^2}\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right| < \frac{c}{r^2}$ egyenlőtlenség teljesül (**D 8.5**), ezért **T 24.47**-et is felhasználva:

$$\left|\int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz\right| \leq \frac{c}{r^2}\cdot r\pi = \frac{c\pi}{r}.$$

Ebből következik, hogy $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$, ami az jelenti, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi}{ae^a},$$

azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{ae^a}$. (Természetesen az is adódik, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 0$, ami azonban számítás nélkül is nyilvánvaló, mivel a $\frac{\sin x}{x^2+a^2}$ függvény páratlan.)

M 24.50 Az $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálok (ahol $R(\sin x, \cos x)$ "szinuszok és koszinuszok" racionális törtfüggvénye, l. **T 12.13**) kiszámítására gyakran jól alkalmazható a $z = e^{ix}$ helyettesítés. Ebben az esetben $\frac{dz}{dx} = ie^{ix} = iz$, és az Euler-formula alapján (**T 24.6**):

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Ha $0 \le x \le 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}_0$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx = \oint_{\mathcal{G}_0} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}.$$

P 24.51 Az előző megjegyzés segítségével számítsuk ki az

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad |p| \ne 1$$

úgynevezett **Poisson-integrál**t!

$$I(p) = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{dz}{iz\left(1 - p\frac{z^2+1}{z} + p^2\right)} = \frac{i}{p} \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{dz}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)}.$$

Tehát p és $\dfrac{1}{p}$ az integrálandó függvény elsőrendű pólusai. Ha $|p| < 1$, akkor csak p van a $\mathcal{G}_0$ belsejében. A reziduum-tételt (**T 24.43**) és **T 24.44**-et alkalmazva:

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \operatorname{Res}(p) = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

A $|p| > 1$ esetben hasonló számítással kapjuk, hogy

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{2\pi}{p^2-1}.$$

T 24.52 Legyen a $2p \quad (p > 0)$ szerint periodikus egyváltozós valós f függvény Fourier-sora (**D 23.26**) $\sum\limits_{n=0} (a_n \cos \dfrac{n\pi x}{p} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{p})$. Ha $c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ és $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ jelöléseket bevezetjük, akkor

$$\sum_{n=0} (a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

és $c_n = \dfrac{1}{2p} \displaystyle\int_{-p}^{p} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}}\, dx \quad (n \in \mathbf{Z})$.

D 24.53 Az előző tételben szereplő $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}$ függvénysort a $\sum\limits_{n=0} (a_n \cos \dfrac{n\pi x}{p} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{p})$ **Fourier-sor komplex alakjá**nak vagy egyszerűen az f függvény **komplex Fourier-sorá**nak nevezzük. (Könnyen belátható, hogy $a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.)

Feladatok

Számítsuk ki komplex integrálok segítségével a következő improprius integrálokat:

204.• $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$,

205. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$,

206. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$,

207. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5}\,dx$,

208.▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}; \quad a>0$,

209.⋆ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

A **209.** feladat eredményének felhasználásával számítsuk ki a következő improprius integrálokat:

210. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$,

211. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2x \sin 3x}{x^2}\,dx$,

212. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx; \quad a \ge b > 0$.

Számítsuk ki komplex integrálok segítségével a következő határozott integrálokat:

213.• $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$,

214. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\,dx$,

215. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3\sin x)^2}$,

216. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x}; \quad a>|b|>0$,

217. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}; \quad a>|b|>0$.

Írjuk fel a következő feladatokban a f $2p$ szerint periodikus egyváltozós valós f függvény Fourier-sorának komplex alakját, és vizsgáljuk meg, hogy mely helyeken állítja elő a sor a függvényt (a függvényt csak a $(-p,p]$ intervallumon adjuk meg):

218.• $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi<x<0, \\ 1, & \text{ha } 0<x<\pi, \end{cases}$

219.▷ $f(x)=\sin x; \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}$ (l. a **23.144** feladatot!),

220. $e^x; \quad -1<x\le 1$ (l. a **23.157** feladatot!).

Vegyes feladatok

221. Bizonyítsuk be, hogy ha $p, q \in \mathbf{N}^+$, akkor $z^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{z})^p$.

222. Bizonyítsuk be, hogy bármely x és y valós szám esetén $|\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$ és $|\cos(x+iy)| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$.

223.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$; egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha z valós szám.

224. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x+iy) = \frac{1}{2}(\sin x + i\cos x) \quad (x, y \in \mathbf{R})$.

225. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{y\to\infty} \operatorname{tg}(x+iy) = i \quad (x, y \in \mathbf{R})$.

226. Határozzuk meg a $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}$ határértéket, ha $\sqrt{z^2+3}$ azon értékeit tekintjük, amelyre $\lim\limits_{z\to 1}\sqrt{z^2+3} = 2$. Létezik-e a határérték, ha $\sqrt{z^2+3}$ azon értékeit tekintjük, amelyre $\lim\limits_{z\to 1}\sqrt{z^2+3} = -2$?

227. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \neq 0$, akkor az $u = a(x^2+y^2)+bx+cy+d$ kétváltozós valós függvény nem lehet egyetlen reguláris komplex függvény valós, illetve képzetes része sem.

228. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris függvény, akkor a $g(z) = -v(x,y) + iu(x,y)$ függvény is reguláris.

229.$^{\triangleright}$ Legyenek az $u(x)$ és $v(y)$ egyváltozós valós függvények differenciálhatók a D_1, illetve a D_2 halmazon. Bizonyítsuk be, hogy az $f(z) = u(x) + iv(y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható a $D\{z = x+iy;\ x \in D_1,\ y \in D_2\}$ halmazon, ha $u(x) = ax+b$ és $v(y) = ay+c \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$.

230. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ és az $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ komplex függvények regulárisak egy összefüggő nyílt halmazon, akkor ezen a halmazon $f(z)$ konstans.

231. Mutassuk meg, hogy az

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{ha } z \in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{ha } z \in \mathbf{C} - \mathbf{R} \end{cases}$$

komplex függvény differenciálható a 0 pontban.

232. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő nyílt halmazon az f komplex függvény reguláris, f' pedig azonosan 0, akkor ezen a halmazon a függvény konstans.

233.* Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő nyílt halmazon $f(z)$ reguláris és $|f(z)|$ konstansfüggvény, akkor ezen a halmazon $f(z)$ is konstans.

234. Mutassuk meg, hogy ha az $f = u + iv$ komplex függvény reguláris egy összefüggő nyílt halmazon, továbbá u vagy v konstansfüggvény, akkor f is konstans ezen a halmazon.

235. Bizonyítsuk be, hogy

$$\oint_{\mathcal{G}} (z-z_0)^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

($n \in \mathbf{Z}$), ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan, önmagát át nem metsző zárt rektifikálható görbe, amelynek belsejében van a z_0 pont.

236. Legyen $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$. Ismeretes, hogy $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+k\pi)}$, ahol $k = 0$ vagy $k = 1$ (**T 6.16**). Jelöljük az egyszerűség kedvéért szintén $\sqrt{z}$-vel az $\sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$ komplex függvényt (z négyzetgyökének $k = 1$ esetben kiszámított értékét). Számítsuk ki a $\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ integrált, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 1$ egyenletű kör valós tengely feletti része pozitív forgásiránnyal.

237. Jelölje $\ln z$ a z komplex logaritmusának főértékét (**D 24.11**). Számítsuk ki az $\frac{\ln^3 z}{z}$ függvény integrálját a $z(t) = \cos t + i \sin t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ egyenletű $\mathcal{G}$ görbe mentén a t paraméter növekedésének irányában.

238.* Legyen z_0 a T összefüggő nyílt halmaz valamely pontja. Bizonyítsuk be, hogy ha az f komplex függvény z_0 kivételével reguláris a T minden pontjában és f korlátos a z_0 pont valamely E környezetében, akkor $\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = 0$ minden T-beli, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható $\mathcal{G}$ esetén.

239.* Az előző feladat segítségével bizonyítsuk be a Cauchy-féle integrálformulát (**T 24.30**)!

240. Bizonyítsuk be, a reziduum-tételt (**T 24.43**)!

241. Bizonyítsuk be a **T 24.52** tételt!

242. Legyen az $f(z)$ komplex függvény az $1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ feltétellel megadott körgyűrűben reguláris. Mutassuk meg, hogy $f(z)$ (0 körüli) Laurent sora a $|z| = 1$ egyenletű kör pontjaiban megegyezik a (2π szerint periodikus) $f(e^{ix})$ $(z = e^{ix})$ függvény komplex alakban felírt Fourier-sorával.