24. Komplex függvények (megoldások)

1. Ha $z = x + iy$, akkor **D 6.3** szerint $\overline{z} = x - iy$, s így

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

Ebből $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ és $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

2. $u = x^2 - y^2, \ v = -2xy.$

3. $u = 2x, \quad v = 0.$

4. $u = x^2 + y^2, \quad v = 0.$

5. $u = x + 2xy, \quad v = y^2 - x^2 - y.$

6. $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy + 1.$

7. $u = x^2 - y^2 + \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = 2xy - \dfrac{y}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$

8. $u = \dfrac{x - 3xy^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$

9. $u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad v = -\dfrac{2y}{(x-1)^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (1, 0)).$

10. $u = 1 + \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$

11. Ha $z = x + iy$, akkor **T 24.6** szerint

$$e^{-z} = e^{-x} \cdot e^{-iy} = e^{-x}(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y,$$

azaz $u = e^{-x} \cos y$ és $v = -e^{-x} \sin y$.

12. Az $e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)$ és az $e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2}$ azonosságokból adódik az állítás (l. **T 24.6**).

13. Alkalmazzuk a **D 24.5** definíciót az egyenletek mindkét oldalára.

14. Alkalmazzuk a **12.** feladat képleteit és **T 24.6**-ot.

15. **T 24.6** és a **13.** fealadat alapján: $u = \operatorname{sh} x \cos y, \quad v = \operatorname{ch} x \sin y.$

16. $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1), \quad v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1).$

17. $u = \dfrac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad v = \dfrac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}.$

18. Az állítás a **14.** feladat felhasználásával könnyen adódik.

19. Az Euler-formula (**T 24.6**) alkalmazásával az egyenlet

$$\cos \overline{z} + i \sin \overline{z} = \overline{\cos z + i \sin z}$$

alakra hozható. **T 6.4** szerint:

$$\overline{\cos z + i \sin z} = \overline{\cos z} + \overline{i \sin z} = \cos \overline{z} - i \sin \overline{z}.$$

(Felhasználtuk az előző feladat eredményeit is.) Ezért $\sin \overline{z} = 0$, azaz $\overline{z} = k\pi$, s így $z = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

20. $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, amiből kapjuk, hogy $y = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

21. **T 24.6** szerint:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = 1.$$

22. **T 24.6** szerint: $\cos(-i) = \operatorname{ch}(i(-i)) = \operatorname{ch} 1$.

23. **D 24.5** és **T 24.6** alapján:

$$\operatorname{tg}\frac{i\pi}{2} = \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \frac{-i\operatorname{sh}\left(i\cdot\frac{i\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(i\cdot\frac{i\pi}{2}\right)} = i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

24. A **14.** feladat és **T 24.6** alapján:

$$\sin(3-4i) = \sin 3\cos 4i - \cos 3\sin 4i = \sin 3\operatorname{ch} 4 - i\cos 3\operatorname{sh} 4.$$

25. $-\dfrac{3i}{4}$.

26. A **14.** feladat és **T 24.6** alapján: $i\operatorname{ch} 1$.

27. $\frac{\sqrt{2}}{6}(5+4i)$. **28.** $\frac{5}{3}$. **29.** $\dfrac{e}{3}(2\sqrt{2}-i)$.

30. A **10.132** feladat szerint $\arccos\cos 5 = 2\pi - 5$, ezért

$$e^{\ln 2 + i\arccos\cos 5} = 2(\cos 5 - i\sin 5).$$

31. **T 24.10** szerint: $\ln(-5+5i) = \ln\left(5\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \ln 5\sqrt{2} + i\pi\left(\dfrac{3}{4} + 2k\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\ln 5\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$.

32. $\ln 1 = \ln\left(1\cdot e^{i\cdot 0}\right) = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i \quad (z \in \mathbf{Z})$; a főérték: 0.

33. $\ln i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $i\frac{\pi}{2}$.

34. $\ln(-e) = 1 + i\pi(2k+1) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $1 + \pi i$ (l. a **33.** feladat megoldását!).

35. **D 24.12** és **T 24.10** szerint:

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}} = e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\cos\ln\sqrt{2} + i\cdot e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\sin\ln\sqrt{2} \quad (k \in \mathbf{Z});$$

a főérték: $e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2})$.

36. $i^{i+1} = i\cdot i^i = i\cdot e^{-\frac{4k+1}{2}\pi} \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $i\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$ (l. a **33** feladat megoldását).

37. $e^{5-i} = e^{(5-i)\ln e} = e^{(5-i)(1+2k\pi i)} = e^{5+2k\pi}(\cos 1 - i\sin 1) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $e^5(\cos 1 - i\sin 1)$.

38. $2^{\frac{e}{2}}\left(\cos e\dfrac{8k+7}{4}\pi + \sin e\dfrac{8k+7}{4}\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $2^{\frac{e}{2}}\left(\cos\dfrac{e\pi}{4} - i\sin\dfrac{e\pi}{4}\right)$.

39. $e^{-10k\pi}(\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)$.

40. $e^{\pi i} = e^{\pi i \ln e} - e^{-2k\pi^2}$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: -1.

41. Az $a = \ln 45 + 2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ és $b = \ln \sqrt{45} - 4k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$ jelöléssel $(6-3i)^{2i+1} = e^b(\cos a + i \sin a)$; a főérték $k = 1$ helyettesítéssel adódik.

42. $e^{2k\pi}$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: 1.

43. $e^{\sqrt{2}(2k+1)i} = \cos(\sqrt{2}(2k+1)) + i \sin(\sqrt{2}(2k+1))$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\cos \sqrt{2} + i \sin \sqrt{2}$.

44. $-5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} - (2k+1)\pi} \left(\cos \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3} \right) + i \sin \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3} \right) \right)$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték $k = 0$ helyettesítéssel adódik.

45. $z = \ln(-1) = i(2k+1)\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. **46.** $z = i\dfrac{4k-1}{2}\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$.

47. **T 24.6** alkalmazásával: $\left(e^{iz}\right)^2 + 2\pi e^{iz} - 1 = 0$. Innen $e^{iz} = -\pi \pm \sqrt{\pi^2+1}$. Az $e^{iz} = -\pi + \sqrt{\pi^2+1}$ egyenletből: $z_1 = 2k\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2+1} - \pi)$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. Az $e^{iz} = -\pi - \sqrt{\pi^2+1}$ egyenletből: $z_2 = (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2+1} + \pi)$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásokban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)

48. Az előző feladathoz hasonló módon: $z = (2k+1)\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)

49. $z = (4k-1)\frac{\pi}{2} - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)

50. $z = k\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. **51.** $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$.

52. **D 24.5** és **T 24.6** alapján:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -1,$$

amelyből: $e^{2iz} = \dfrac{1+i}{i-1} = -i$. Innen: $z = \dfrac{4k-1}{4}\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$.

53. Az egyenletnek nincs gyöke.

54. $z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(2k+1)\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)

55. $z = i\dfrac{4k+1}{4}\pi$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$. **56.** Az egyenletnek nincs megoldása.

57. Használjuk fel a **18.** feladat eredményeit:

$$\overline{\cos iz} = \cos \overline{iz} = \cos(-i\overline{z}) = \cos i\overline{z}.$$

Az egyenletnek megoldása minden z komplex szám.

58. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg: $z = k\pi i$ $\quad (k \in \mathbf{Z})$.

59. Ha $z = x + iy$ megoldása az egyenletnek, akkor **D 24.12** és **T 24.10** szerint:

$$5^z = e^{z \ln 5} = e^{(x+iy)(\ln 5 + i2k\pi)} = e^{x \ln 5 - 2k\pi y + i(y \ln 5 + 2k\pi x)} = 1.$$

Igy **T 24.6**-ot is felhasználva, az

$$1 = |e^{x \ln 5 - 2k\pi y} \cdot e^{i(y \ln 5 + 2k\pi x)}| = e^{x \ln 5 - 2k\pi y}$$

egyenletnek minden k egész számra teljesülni kell. Ezt az egyenletet már a valós számok halmazában kell megoldani ($\ln 5$ is valós logaritmust jelent), ezért $x\ln 5 - 2k\pi y = 0$. A $k = 0$ helyettesítéssel $x = 0$ adódik. Így $-2k\pi y = 0$, amiből tetszőleges $k \neq 0$ választással az $y = 0$ eredményt kapjuk, azaz $z = 0$ az egyenlet egyetlen megoldása.

60. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg. Az egyenletnek nincs gyöke.

61. Az **59.** feladat megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy csak $z = 0$ lehet az egyenlet gyöke. $2^0 = 1$ miatt azonban ez sem megoldás.

62. Az **59.** feladat megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy $z = 1$.

63. Legyen z megoldása az egyenletnek. Az nyilvánvaló, hogy $z \neq 0$. Adjuk meg z-t trigonometrikus alakban (**D 6.12**): $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $(r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$. Igy az egyenlet a következő alakba írható:

$$e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\ln r + i(\varphi + 2k\pi))} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Az **59.** feladat megoldásához hasonló módon ebből:

$$e^{r\ln r\cos\varphi - r(\varphi + 2k\pi)\sin\varphi} = r.$$

Mivel ezt az egyenletet már a valós számok halmazán kell megoldani ($\ln r$ is valós logaritmust jelent), ezért mindkét oldal valós logaritmusát véve, az

$$r\ln r\cos\varphi - r(\varphi + 2k\pi)\sin\varphi = \ln r$$

egyenletet kapjuk. Az egyenletnek minden k egész számra teljesülni kell. A $k = 0$, illetve a $k = 1$ választással a

$$r\ln r\cos\varphi - r\varphi\sin\varphi = \ln r,$$

$$r\ln r\cos\varphi - r(\varphi + 2\pi)\sin\varphi = \ln r$$

egyenletekhez jutunk. Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, akkor az $r2\pi\sin\varphi = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $\sin\varphi = 0$, azaz $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ megoldások adódnak. Ezeket az értékeket például az első egyenletbe helyettesítve, az $\ln r(\pm r - 1) = 0$ egyenleteket kapjuk, amiből $r = 1$. A két lehetséges megoldás: $z = 1$ és $z = -1$. Az eredeti egyenletbe helyettesítve, meggyőződhetünk arról, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

64. A feladat megoldását ugyanúgy kezdve, mint a **59.** feladat megoldását, az

$$e^{x\ln 5 - 2k\pi y + i(y\ln 5 + 2k\pi x)} = 1$$

egyenlethez jutunk. Ha tehát az 5^z hatvány legalább egy értékére fennáll, hogy $5^z = 1$, akkor vannak olyan k és l egész számok, hogy

$$x\ln 5 - 2k\pi y = 0, \quad y\ln 5 + 2k\pi x = 2l\pi$$

($\ln 5$ valós logaritmust jelent). Ebből:

$$x = \frac{4kl\pi^2}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2}, \quad y = \frac{2l\pi\ln 5}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2},$$

azaz

$$z = \frac{2l\pi(2k\pi + i\ln 5)}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2} \quad (k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}).$$

Adott k egész szám esetén az egyenlet bal oldalába az előbb meghatározott z-t és 5 komplex logaritmusának $\ln 5 + i2k\pi$ értékét helyettesítve, **D 24.12** szerint éppen 1-et kapunk eredményül.

65. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg:

$$z = \frac{2l\pi - i\ln 2}{2k\pi} \quad (k \in \mathbf{Z} - \{0\},\ l \in \mathbf{Z}).$$

Az eredeti egyenletbe való helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a **D 24.12** szerint adott $k \neq 0$ egész szám esetén az egyenlet bal oldalába az előbb meghatározott z-t és 2 komplex logaritmusának $i2k\pi$ értékét helyettesítve, éppen 2-t kapunk eredményül.

66. $z = \dfrac{(2l+1)\pi(2k\pi + i\ln 2)}{\ln^2 2 + 4k^2\pi^2} \quad (k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}).$

67. $z = \dfrac{\ln^2 5 + 4kl\pi^2 + i2\pi\ln 5(l-k)}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2} \quad (k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}).$

68. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**D 11.13**), ezért közvetlenül a $z = i$ helyettesítéssel nem számítható ki. Mivel a $z = i$ hely kivételével

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 3z^3 + (3i-2)z^2 + (5-2i)z + 5i$$

(l. például a **T 10.3** tételt), így

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} =$$

$$\lim_{z\to i}(3z^3 + (3i-2)z^2 + (5-2i)z + 5i) = 4(1+i).$$

69. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**D 11.13**). Ezért $\displaystyle\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} =$

$$\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{(z^2+2z+4)(z^2-2z+4)} = \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z+2}{z^2+2z+4} = \frac{3-\sqrt{3}i}{8}.$$

70. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z^6+1} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z^4 - z^2 + 1} = \frac{1}{3}.$

71. $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z\left(z - e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}{z^3+1} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z}{(z+1)\left(z - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}i}{6}.$

72. Ha az $\operatorname{Re} f$ és az $\operatorname{Im} f$ valós függvények folytonosak a z_0 helyen, akkor bármely pozitív ϵ-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha $|z - z_0| < \delta$, akkor $|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ és $|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ezért:

$$|f(z) - f(z_0)| = |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) + i(\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0))| \leq$$

$$|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| + |(\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0))| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

A fordított állítás nyilvánvaló, mivel

$$|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| \le |f(z) - f(z_0)|,$$
$$|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| \le |f(z) - f(z_0)|.$$

73. Ha $z = x + iy$, akkor $\operatorname{Re}|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\operatorname{Im}|z| = 0$. Ezek a kétváltozós valós függvények mindenütt folytonosak (l. **D 14.1** és **D 14.2**). Ebből az előző feladat felhasználásával kapjuk az állítást. Közvetlenül a folytonosság definíciója alapján is bebizonyítható az állítás. Ehhez először a háromszög-egyenlőtlenség (**1.49**) segítségével mutassuk meg, hogy bármely z és z_0 komplex számra az $||z| - |z_0|| \le |z - z_0|$ egyenlőtlenség teljesül.

74. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg.

75. Íjuk fel z-t trigonometrikus alakban (**D 6.12**). Akkor

$$f(z) = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r\cos\varphi}{r} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cos\varphi \quad (r \ne 0).$$

Mivel $\cos\varphi + i\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ korlátos függvényei φ-nek, ezért **T 7.26** szerint

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cos\varphi = 0.$$

Tehát legyen $f(0) = 0$.

76. Az előző feladat megoldásához hasonlóan: $f(0) = 0$.

77. A **75.** megoldásához hasonlóan: $f(0) = 0$.

78. Nem lehet úgy értelmezni, mert $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nem létezik.

79. Ha $z = x \quad (x \in \mathbf{R})$, akkor $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z} = 1$. Ha $z = iy \quad (y \in \mathbf{R})$, akkor $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z} = -1$. Ez azt jelenti, hogy a határérték nem létezik.

80. A $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakkal (**D 24.8**) számolva $f(z) = \sin 2\varphi$. Ez azt jelenti, hogy rögzített φ esetén

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(z) = \sin 2\varphi,$$

azaz a határérték különböző irányokból más és más lesz (φ-től függő).

81. Az $u = y^3 - 3x^2y$ és a $v = x^3 - 3xy^2$ kétváltozós valós függvények mindkét változó szerint mindenütt parciálisan differenciálhatók, s a parciális differenciálhányadosok folytonosak.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

azaz minden (x, y) pár kielégíti a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenleteket. Ez azt jelenti, hogy a függvény az egész komplex számsíkon differenciálható (**T 24.16**), s így reguláris is (**D 24.18**).

82. Ha $z = x + iy$, akkor $\overline{z} = x - iy$ (**D 6.3**), azaz $u = x$ és $v = -y$. Mivel $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ és $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$, ezért **T 24.14** szerint a függvény sehol sem differenciálható.

83. Ha $z = x + iy$, akkor $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**D 6.5**). Az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

tehát **T 24.14** szerint ekkor a függvény nem differenciálható. A $(0, 0)$ pontban a differenciálhatóságot a definíció (**M 24.13** és **D 9.1**) alapján vizsgáljuk meg:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}.$$

Könnyen belátható, hogy ez a határérték nem létezik.

84. A függvény sehol sem differenciálható.

85. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

86. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

87. Használjuk fel a $\cos(x - iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y$ összefüggést (l. a **14.** feladatot). A $z = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ pontokban a függvény differenciálható, de sehol sem reguláris (**D 24.18**).

88. A függvény sehol sem differenciálható.

89. A függvény csak az $z = 1$ helyen differenciálható.

90. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

91. A függvény sehol sem differenciálható.

92. A függvény az egész komplex számsíkon differenciálható, így reguláris is (**D 24.18**).

93. Ha $z \neq 0$, akkor a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek (**T 24.14**) nem teljesülnek. A $(0, 0)$ pontban a definíció alapján vizsgáljuk a differenciálhatóságot. Írjuk a $(0, 0)$ valamely környezetében a z komplex számot exponenciális alakban (**D 24.8**); ekkor:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|\overline{z}}{z} = \lim_{r \to 0} re^{-2\varphi i} = 0.$$

A függvény (csak) a $z = 0$ helyen differenciálható.

94. Legyen $z = re^{i\varphi}$, akkor $|z| \operatorname{Re} z = r^2 \cos\varphi$. Ha $r \neq 0$, akkor **T 24.17** szerint:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos\varphi, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

azaz ekkor a függvény nem differenciálható. Az $r = 0$ (azaz $z = 0$) esetben a definíció alapján:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z| \operatorname{Re} z}{z} = \lim_{r \to 0} r \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = 0.$$

A függvény csak a $z = 0$ helyen differenciálható.

95. A függvény az egész komplex számsíkon differenciálható, így reguláris is (**D 24.18**).

96. **T 24.6** szerint $e^{c(x+iy)} = e^{cx}(\cos cy + i \sin cy)$, ezért $u = e^{cx} \cos cy$ és $v = e^{cx} \sin cy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = ce^{cx} \cos cy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -ce^{cx} \sin cy,$$

és ezek a parciális deriváltak mindenütt folytonosak. Ez az jelenti (**M 24.15** és **T 24.16**), hogy a függvény mindenütt reguláris. **T 24.14** alapján:

$$(e^{cz})' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = c \cdot e^{cz}.$$

97. Ha $z = re^{i\varphi}$ $(r \neq 0)$, akkor **T 24.10** szerint $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Rögzítsük k értékét, és $\ln z$-t mindig ezzel az értékkel számítsuk ki. (Úgy is szokták mondani, hogy többértékű $\ln z$ függvénynek tekintsük egy ágát.)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

ami **T 24.17** szerint azt jelenti, hogy a függvény (bármely ága) az értelmezési tartományán reguláris. Szintén **T 24.17** szerint:

$$(\ln z)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}.$$

98. A bizonyítás az előző feladathoz hasonló módon történhet; $\left(\ln z^2\right)' = \frac{2}{z}$.

99. Adjuk meg a **13.** feladat és **T 24.6** segítségével a függvény valós és képzetes részét. Alkalmazzuk **T 24.14**-et; $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

100. $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

101. Írjuk fel z-t trigonometrikus alakban (**D 6.12**), és alkalmazzuk a Moivre-képletet (**T 6.14**): $z^n = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi$. Ha $z \neq 0$, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1} \cos n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^n \cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^n \sin n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1} \sin n\varphi,$$

ezért ekkor **T 24.17** szerint a függvény reguláris. A $z = 0$ helyen a definíció alapján vizsgáljuk a differenciálhatóságot: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^n}{z} = \lim\limits_{z\to 0} z^{n-1} = 0$, ha $n > 1$, és $\lim_{z\to 0} \frac{z^n}{z} = 1$, ha $n = 1$. Ez azt jelenti, hogy a függvény az értelmezési tartományán reguláris. A $z \neq 0$ esetben **T 24.17**-et alkalmazva:

$$(z^n)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z} \cdot nr^{n-1}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = nz^{n-1},$$

amely $z = 0$ és $n > 1$ esetben is megadja a differenciálhányadost.

102. A $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ azonosságot (**14.** feladat) felhasználva kapjuk az állítást; $(\cos z)' = -\sin z$.

103. $(\sin z)' = \cos z$.

104. Az előző feladat és **M 24.13** alapján: $\left(\sin \frac{z}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cos \frac{z}{3}$.

105. A függvény azokon a z helyeken nincs értelmezve, ahol $\cos z = 0$, azaz **T 24.6** szerint $\operatorname{ch} iz = 0$. Az utóbbi egyenlet megoldásai: $z = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z})$. A **102.** és a **103.** feladatok megoldása, valamint **M 24.13** alapján: $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

106. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \left\{\dfrac{4k+1}{4}\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$;
$\left(\dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}\right)' = \dfrac{1}{1 - \sin 2z}$.

107. $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$.

108. Ha $z = x + iy \quad (z \neq 1)$, akkor

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2} + i\frac{2y}{1-2x+x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(x^2-y^2-2x+1)}{(1-2x+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4y(x-1)}{(1-2x+x^2+y^2)^2}.$$

A függvény az értelmezési tartományán reguláris; $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)' = \dfrac{2}{(1-z)^2}$.

109. A **96.** és a **101.** feladatok megoldása, valamint **M 24.13** szerint: $(z \cdot e^{-z})' = e^{-z}(1-z)$.

110. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{-i, i\}$;

$$\left(\frac{z\cos z}{1+z^2}\right)' = \frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}.$$

111. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{2k\pi i;\ k \in \mathbf{Z}\}$;
$\left(\dfrac{e^z+1}{e^z-1}\right)' = -\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$.

112. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\}$;
$\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z} = \dfrac{\sin 2z}{2}$ minden olyan z helyen, ahol a bal oldal értelmezve van;
ezért $\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}\right)' = \cos 2z$.

113. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{0\}$;
$\left(\dfrac{e^z}{z}\right)' = \dfrac{e^z(z-1)}{z^2}$.

114. A függvény szerint nem harmonikus, mert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}(2x^2+1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2y^2-1)$$

(l. **M 24.20**).

115. A függvény harmonikus, mert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{ch} x \cos y - \operatorname{ch} x \cos y = 0.$$

116. Harmonikus.

117. Harmonikus.

118. Mivel $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2\cos\frac{x}{y}}{y^2 \sin^3 \frac{x}{y}}$ és $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2x\left(x\cos\frac{x}{y} - y\sin\frac{x}{y}\right)}{y^4 \sin^3 \frac{x}{y}}$, ezért a függvény nem harmonikus.

119. Harmonikus.

120. Az **M 24.20**-beli definíció szerint a függvény harmonikus az értelmezési tartományán (amely egyszeresen összefüggő nyílt halmaz), ezért szintén **M 24.20** szerint van olyan reguláris komplex függvény (**D 24.18**) ezen a halmazon, amelynek u valós vagy képzetes része. Legyen f olyan reguláris komplex függvény, amelynek valós része u; ekkor **T 24.14** alapján

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y-i(x-y)) = 2(1-i)z,$$

ha $z = x+iy$. Legyen g olyan reguláris komplex függvény, amelynek képzetes része u; ekkor

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-y+i(x+y)) = 2(i+1)z.$$

121. Nem.

122. Nem.

123. Ha $z = x+iy$, akkor $f'(z) = 6x + i(6y-2) = 6z - 2i$ és $g'(z) = 2 - 6y + i6x = 6iz + 2$.

124. Ha $z = x+iy$, akkor $f'(z) = \dfrac{2(x-iy)}{x^2+y^2} = \dfrac{2}{z}$ és $g'(z) = \dfrac{2(y+ix)}{x^2+y^2} = \dfrac{2i}{z}$.

125. Ha $z = x+iy$, akkor $f'(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x) = e^{iz}$ és $g'(z) = i\cdot e^{iz}$.

126. Ha $z = x+iy$, akkor

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{z^2},$$

$$g'(z) = \frac{-2xy + i(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{i}{z^2}.$$

127. Ha van olyan v kétváltozós valós függvény, hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény eleget tesz a feltételeknek, akkor **T 24.14** szerint u-nak és v-nek teljesítenie kell a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenleteket. Mivel $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$ és $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, ezért $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y$. Innen

$$v(x, y) = \int e^x \sin y \, dy = -e^x \cos y + c(x),$$

ahol $c(x)$ az y-tól független. A $c(x)$ függvény meghatározása céljából differenciáljuk x szerint az egyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y + c'(x).$$

Használjuk fel, hogy $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, azaz: $-e^x \cos y + c'(x) = -e^x \cos y$. Ebből $c'(x) = 0$, azaz $c(x) = c \quad (c \in \mathbf{R})$, amiből

$$f(z) = e^x \sin y + i(-e^x \cos y + c).$$

Az $f(0) = i$ feltételből következik, hogy $c = 2$.

128. A **126.** feladat megoldása szerint: $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$, amiből $f(z) = \dfrac{1}{z} + ci$ $(c \in \mathbf{R})$. Megjegyezzük, hogy a konstans azért képzetes, mert az u függvény harmonikus társai $v + c \quad (c \in \mathbf{R})$ alakúak (l. **M 24.20**). Az $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$ feltételből következik, hogy $c = 0$.

129. A **127.** feladat megoldásában megismert módszert alkalmazva:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2, \quad u(x, y) = \int (2x + 2) \, dx = x^2 + 2x + c(y),$$

$$-2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = c'(y), \quad c(y) = -y^2 + c \ (c \in \mathbf{R}),$$

$$f(z) = x^2 + 2x - y^2 + c + i(2xy + 2y) = z^2 + 2z + c.$$

Az $f(i) = 2i - 1$ feltétel miatt $c = 0$, ezért $f(z) = z^2 + 2z$. Megoldható a feladat az előző feladat megoldásánál közölt módszerrel is:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2 + i2y = 2z + 2,$$

s így $f(z) = z^2 + 2z + c$.

130. $f(z) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - 5y - x + c) = (x^2 + 2ixy - y^2)$ $-5(x + iy) + (-xi + y) + 2 + ci = z^2 - 5z - iz + 2 + ic \quad (c \in \mathbf{R})$.
A $f(1) = -2$ feltételből $c = 1$.

131. $f'(z) = 3z^2, \quad f(z) = z^3 + ic \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = -2i.$

132. $f'(z) = \dfrac{1}{z}, \quad f(z) = \ln z + c \quad (c \in \mathbf{R})$, ahol $\ln z$ a z logaritmusának főértékét (**D 24.11**) jelenti; $\quad c = 0$.

133. $f(z) = \frac{2-i}{2} z^2 + ic \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = \frac{1}{2}.$

134. $f(z) = \frac{1}{2} z^2 + c \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = 0.$

135. Az $f(z) = \operatorname{Re} z$ függvény folytonos az egész komplex számsíkon, ezért **T 24.23** szerint a komplex számsík bármely rektifikálható görbeívén integrálható. A $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t(1+i) \quad (0 \le t \le 1)$. A $z(t)$ folytonosan differenciálható a $[0,1]$ intervallumon, ezért **T 24.22** alapján:

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Re} z(t) z'(t)\, dt = \int_0^1 t(1+i)\, dt = (1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{i+1}{2}.$$

136. A $|z|\overline{z}$ függvény folytonos a komplex számsíkon, ezért a komplex számsík bármely rektifikálható görbeívén integrálható (**T 24.23**). A $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = e^{it} \quad (0 \le t \le \pi)$. **T 24.22** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} |z|\overline{z}\, dz = \int_0^\pi e^{-it} \cdot e^{it} \cdot i\, dt = i[t]_0^\pi = i\pi.$$

137. A $\dfrac{z}{\overline{z}}$ függvény folytonos a $\mathbf{C}-\{0\}$ halmazon, ezért **T 24.23** szerint a $\mathcal{G}$ görbén integrálható. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{G}_1} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{G}_2} f(z)\, dz +$$
$$\int_{\mathcal{G}_3} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{G}_4} f(z)\, dz.$$

A $\mathcal{G}_1$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t \quad (1 \le t \le 2)$. Mivel $z'(t) = 1$, így **T 24.22** alapján:

$$\int_{\mathcal{G}_1} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_0^1 dt = 1.$$

A $\mathcal{G}_2$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 2+it \quad (0 \le t \le 1); \quad z'(t) = i$, ezért:

$$\int_{\mathcal{G}_2} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_0^1 \frac{2+it}{2-it} i\, dt = i\int_0^1 \frac{(2+it)^2}{4+t^2}\, dt =$$

$$i\int_0^1 \left(\frac{4-t^2}{4+t^2} + i\frac{4t}{4+t^2}\right) dt = i\int_0^1 \left(\frac{2}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - 1 + i\frac{4t}{4+t^2}\right) dt =$$

$$i\left[4 \operatorname{arctg}\frac{t}{2} - t + 2i\ln(4+t^2)\right]_0^1 = 2\ln\frac{4}{5} + i(4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 1).$$

A $\mathcal{G}_3$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t+i \quad (2 \ge t \ge 1)$, így:

$$\int_{\mathcal{G}_3} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_2^1 \frac{t+i}{t-i}\, dt = 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} - 1 + i\ln\frac{2}{5}.$$

A $\mathcal{G}_4$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 1+it \quad (1 \ge t \ge 0)$, amiből:

$$\int_{\mathcal{G}_4} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \ln 2 + i\left(1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tehát $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{z}{\overline{z}}\,dz = 2(\ln\frac{4}{5} + \operatorname{arctg} 2) + \ln 2 - \frac{\pi}{2} + i\left(\ln\frac{2}{5} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \approx$ $0,890361 - 0,632497i$.

138. 1.megoldás: Az e^z függvény mindenütt folytonos. $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 2e^{it}\quad(\pi \le t \le 2\pi)$. Ezért **T 24.23** és **T 24.22** alapján:

$$\int_{\mathcal{G}} e^z\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{2e^{it}} 2ie^{it}\,dt = \left[e^{2e^{it}}\right]_{\pi}^{2\pi} = e^2 - e^{-2}.$$

2.megoldás: e^z az egész komplex számsíkon reguláris (l. a **96.** feladat megoldását), ezért **T 24.24** szerint az integrálás a kezdő- és végpont között tetszőleges rektifikálható görbeíven elvégezhető. Például a $z(t) = t\quad(-2 \le t \le 2)$ egyenletű szakaszt választva:

$$\int_{\mathcal{G}} e^z\,dz = \int_{-2}^{2} e^t\,dt = e^2 - e^{-2}.$$

3.megoldás: Mivel e^z-nek egy primitív függvénye e^z, ezért **T 24.27** szerint: $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} e^z\,dz = [e^z]_{-2}^{2}$.

139. A $3z+1$ függvény az egész komplex számsíkon (amely egyszeresen összefüggő nyílt halmaz) reguláris, ezért **T 24.24** szerint: $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} (3z+1)\,dz = 0$.

140. $\displaystyle -\int_{\mathcal{G}} (iz - 2\overline{z})\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4ie^{2it} - 4e^{-it}\right) 2ie^{it}\,dt = -\frac{8}{3} + i\left(4\pi + \frac{8}{3}\right)$.

141. $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete (választható x paraméternek): $z(x) = x + 2x^2 i\quad(0 \le x \le 1)$;

$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{Re}(z + z^2)\,dz = \int_0^1 (x + x^2 - 4x^4)(1 + 4xi)\,dx = \frac{1}{30} - \frac{i}{3}.$$

142. A függvény az egész komplex számsíkon reguláris (l. a **95.** feladatot), ezért **T 24.24** és **T 24.27** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} ze^{z^2}\,dz = \frac{1}{2}\left[e^{z^2}\right]_{-i}^{i} = 0.$$

143. $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{z+2}{z}\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}} 2ie^{it}\,dt = 4 + 2\pi i$.

144. $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} (3z^2 + 2z)\,dz = \left[z^3 + z^2\right]_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$.

145. Alakítsuk az integrálandó függvényt a következő módon:

$$\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}.$$

Az $f(z) = \dfrac{2z-1}{z}$ függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt reguláris. $\mathcal{G}$ és belseje benne van f regularitási tartományában (**D 24.18**), ezért alkalmazható **T 24.30**:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z^2 - z}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i.$$

146. Az $f(z) = \operatorname{ch} z$ függvényre alkalmazható a **T 24.31** Cauchy-féle integrálformula ($n = 4$ helyettesítéssel):

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\, dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(0) = \frac{2\pi i}{4!} \operatorname{ch} 0 = \frac{i\pi}{12}.$$

147. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \frac{\sin i^2\pi}{2i} = -\pi.$

148. A nevező zérushelyei, a 0 és 1 pontok a $\mathcal{G}$ kör belsejében vannak. Ezért vegyük fel a $|z| = r$ és a $|z-1| = r$ egyenletű köröket pozitív forgásiránnyal, ahol $0 < r < \frac{1}{2}$ (l. az ábrát). **M 24.29** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz + \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz.$$

A jobb oldalon lévő két integrál kiszámítható a Cauchy-féle integrálformulák alkalmazásával:

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\left(\frac{e^z}{z-1} \right)'' \right)_{z=0} = -5\pi i,$$

$$\oint_{\mathcal{G}_2} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}\, dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^3} \right)_{z=1} = 2\pi e\, i.$$

Ebből $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz = i\pi(2e - 5).$

149. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{1+z^2}\, dz = \frac{1}{2i} \left(\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-i} - \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z+i} \right) = \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0.$

150. A **T 12.16**, a **T 10.4** és a **T 12.18** tételek érvényesek komplex polinomokra is. (Természetesen a **T 12.18** tétel képletében nem szerepel a harmadik és a negyedik sor.) Ezek alapján kapjuk az

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

felbontást. Így

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\, dz = -\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z}\, dz + \frac{1}{2} \left(\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-1}\, dz + \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z+1}\, dz \right).$$

Az első két integrál értéke a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint 0, a harmadik integrál értéke a Cauchy-féle integrálformula (**T 24.30**) alapján $2\pi i$.

Ezért: $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\, dz = \pi i.$

151. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\, dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \left(\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2} \right)' \right)_{z=i} = \frac{-\pi + \pi^2 i}{2}.$

152. Az ellipszis fókuszpontjai 1 és -1, fél nagytengelye 2, tehát fél kistengelye $\sqrt{3}$. Ez azt jelenti, hogy a $\frac{\pi i}{2}$ pont az ellipszis belsejében van. (Ugyanez közvetlen behelyettesítéssel is adódik: $\left|\frac{\pi i}{2} - 1\right| + \left|\frac{\pi i}{2} + 1\right| = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} = \sqrt{\pi^2 + 4} < 4$.) Ezért **T 24.31** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left((\sin z)''\right)_{z=\frac{\pi i}{2}} = i\pi\left(-\sin\frac{\pi i}{2}\right) = \pi \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}.$$

(Felhasználtuk a **103.** és **102.** feladat eredményét, valamint a **T 24.6** tételt.)

153. A $z^3 - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $1, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$. A háromszög belsejében csak az 1 pont van. Ezért **M 24.30** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1}\, dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{e^{2z}}{z^2+z+1}}{z - 1}\, dz = 2\pi i \frac{e^2}{3}.$$

154. $z^5 - z^4 - z + 1 = (z-1)^2(z+1)(z-i)(z+i)$; az 1, -1, i, $-i$ pontok az ellipszis belsejében vannak. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\frac{i\pi}{4e}(3 + 2e\sin 1 - e^2) \approx 0,053641i$.

155. Osszuk el az $|4z + i| = 6$ egyenlet mindkét oldalát 4-gyel: $\left|z + \frac{i}{4}\right| = \frac{3}{2}$. A görbe a $-\frac{i}{4}$ középpontú $\frac{3}{2}$ sugarú kör. $z^3 - 2iz^2 - z = z(z-i)^2$; a 0 és i pontok a kör belsejében vannak. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\pi\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1\right)$. (A számításnál felhasználtuk a **99.** feladat eredményét és az **M 24.13** megjegyzést is.)

156. $(z^2 - z)(z^2 - 2iz - 1) = z(z-1)(z-i)^2$; a 0 és az i pont a kör belsejében van, az 1 pont azonban nincs. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\pi\left(i\frac{3e^2+1}{2e} - e\right) \approx 13,387465i - 8,539734$. (A számításnál felhasználtuk a **102.** feladat eredményét és **M 24.13** megjegyzést is.)

157. A **97.** és **101.** feladatokat is felhasználva:

$$(\ln(1+z))^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n!}}{(1+z)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Így az $\ln z$ függvény $z_0 = 0$ körüli Taylor-sora: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. A sor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}z^{n-1}$ mértani sor tagonkénti integrálásával nyerhető. Az utóbbi sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|z| < 1$, s ebben az esetben az összege $\frac{1}{1+z}$ (**T 22.5**). Ezért, ha $|z| < 1$, akkor $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. Ha viszont $|z| > 1$, akkor a Taylor-sor divergens.

158. Mivel $\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\ln(1+z)-\ln(1-z)$, ezért az előző feladat megoldása alapján

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-z)^n}{n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1.$$

159. A **12.** feladat szerint

$$\sin z=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Így **D 24.5** alapján:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),\quad z\in\mathbf{C}.$$

160. 1.megoldás: A **101.** feladat alapján: $\left(\dfrac{1}{1+z}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}$ $(n\in\mathbf{N})$. Így a függvény 1 körüli Taylor-sora: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$. Például a hányadoskritériummal (**T 22.25**) kimutatható, hogy a Taylor-sor az 1 szám 2 sugarú környezetében még konvergens. Például a **22.154** feladat segítségével megmutatható, hogy a maradéktag 0-hoz tart, azaz a sor ebben a környezetben előállítja a függvényt.

2.megoldás: Az $\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$ átalakítást figyelembe véve:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n,\quad |z-1|<2$$

(**T 22.5**).

161. $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris hely. **D 24.5** alapján a függvény 0 körüli Laurent-sora a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$ Taylor-sor, ezért **D 24.39** szerint a 0 megszüntethető szingularitás.

162. Az előző feladat megoldásához hasonló módon kapjuk, hogy $z=0$ lényeges szingularitás.

163. **T 24.41** szerint $z=0$ negyedrendű pólus.

164. **T 24.41** szerint $z=0$ elsőrendű pólus és $z=1$ harmadrendű pólus.

165. Mivel $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ a $(2\sin z-1)^2$ kétszeres zérushelyei, ezért **T 24.41** szerint a $\dfrac{1}{(2\sin z-1)^2}$ függvény másodrendű pólusai.

166. Az $\frac{1}{i2k\pi}$ $(k\in\mathbf{Z}-\{0\})$ helyek az $e^{\frac{1}{z}}-1$ függvény egyszeres zérushelyei, ezért **24.41** szerint ezek a helyek az eredeti függvény elsőrendű pólusai. A $z=0$ hely a függvény lényeges szingularitása. A $z=0$ az $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z}$ függvénynek nem zérushelye, és kimutatható például indirekt módon, hogy $\lim_{z \to 0} \dfrac{z}{e^{\frac{1}{z}} - 1}$ nem létezik.

167. A $z = -2i$ pont lényeges szingularitás (**D 24.5** alapján végezzük el a $z \mapsto \dfrac{1}{z + 2i}$ helyettesítést).

168. A $z = 1$ megszüntethető szingularitás. (Használjuk fel, hogy $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$, ami $\sin z$ definíciójából (**D 24.5**) azonnal adódik.) **T 24.41** szerint a $1 + \dfrac{\pi(2k+1)}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek elsőrendű pólusok.

169. **T 24.41** szerint a $z = 0$ hely negyedrendű pólus. (Használjuk fel, hogy $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$; l. az előző feladat megoldását.)

170. A függvénynek $z = 1$ az egyetlen izolált szinguláris helye és ez **T 24.41** szerint harmadrendű pólus. **D 24.5** alapján (az $n = k - 3$ helyettesítést is végrehajtva):

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} \cdot e^{2(z-1)} = \frac{e^2}{(z-1^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (z-1)^k}{k!} =$$

$$e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^{k-3} = e^2 \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n$$

és $K = \mathbf{C} - \{1\}$.

171. A $z = 0$ az egyetlen szinguláris hely, és ez harmadrendű pólus; $\dfrac{e^{z^2}}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n-3}}{n!}$; $\quad K = \mathbf{C} - \{0\}$.

172. A függvénynek $z = -2$ az egyetlen izolált szinguláris helye. **D 24.5** szerint:

$$(z-3) \cos \frac{1}{z+2} = (z + 2 - 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z+2} \right)^{2n} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{(z+2)^{2n-1}} - \frac{5}{(z+2)^{2n}} \right).$$

$z = -2$ lényeges szingularitás (**D 24.39**); $K = \mathbf{C} - \{-2\}$.

173. A függvénynek $z = 0$ az egyetlen izolált szinguláris helye, amely lényeges szingularitás; $\dfrac{1}{z} \operatorname{ch} \dfrac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)! z^{2n+1}}$; $\quad K = \mathbf{C} - \{0\}$.

174. A függvénynek $z = 0$ az egyetlen izolált szinguláris helye. **D 24.5**-öt is felhasználva:

$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{\sin z}{z^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

$z = 0$ megszüntethető szingularitás (**D 24.39**); $K = \mathbf{C}$.

175. A függvénynek $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris helye, és ez megszüntethető szingularitás; $\dfrac{1-\cos z}{z}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-1}$; $\quad K=\mathbf{C}-\{0\}$.

176. **T 24.41** szerint -1 és -2 elsőrendű pólusok. Először a függvény -1 körüli Laurent-sorát adjuk meg. Legyen $u=z+1$, akkor $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{u-1}{u(u+1)}$.

T 22.5 szerint:

$$\frac{u-1}{u}\cdot\frac{1}{1+u}=\left(1-\frac{1}{u}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n=-\frac{1}{u}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,\quad |u|<1,$$

ezért $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=-\dfrac{1}{z+1}+2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n$;

$K=\{z\in\mathbf{C};\quad 0<|z+1|<1\}$. Hasonlóan kapható meg, hogy a függvény -2 körüli Laurent-sora: $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{2}{z+2}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n$;

$K=\{z\in\mathbf{C};\quad 0<|z+2|<1\}$.

177. A függvénynek $z=-1$ az egyetlen szinguláris helye. A **150.** feladat megoldásában leírt módon kapjuk, hogy

$$\frac{z}{(z+1)^3}=\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{(z+1)^3}.$$

A jobb oldali kifejezés a függvény -1 körüli Laurent-sora; $K=\mathbf{C}-\{-1\}$.

178. Izolált szinguláris helyek: 0 és 1. Határozzuk meg a függvény 0 körüli Laurent-sorát a **T 24.36** tétel segítségével. Ha $\mathcal{G}$ a 0-t belsejében tartalmazó és a $0<|z|<1$ feltételt kielégítő körgyűrűben haladó zárt rektifikálható görbe pozitív forgásiránnyal, akkor $n\geq -1$ esetben **T 24.31** szerint:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}}\frac{\frac{1}{z(1-z)}}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}}\frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+2}}\,dz=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n+1)}\right)_{z=0}=\left(\frac{1}{(1-z)^{n+2}}\right)_{z=0}=1.$$

Ha viszont $n<-1$, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint $c_n=0$. Ezért:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n;\quad K=\{z\in\mathbf{C};\quad 0<|z|<1\}.$$

Megjegyezzük, hogy a Laurent-sor egyszerűbben megadható a

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$$

felbontás és **T 22.5** segítségével. Hasonlóan látható, hogy a függvény 1 körüli Laurent-sora:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\quad K=\{z\in\mathbf{C};\quad 0<|z-1|<1\}.$$

Ez a sorfejtés is megkapható **T 22.5** és a $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1+(z-1)}$ felbontás segítségével.

179. A függvénynek 0 és 3 az izolált szinguláris helyei és ezek **T 24.41** szerint másodrendű pólusok. Először megadjuk a függvény 3 körüli Laurent-sorát. A **150.** feladat megoldásában leírt módon kapjuk, hogy

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{2}{27z} + \frac{1}{9z^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{5}{9(z-3)^2}.$$

A függvény Laurent-sorának főrésze (**D 24.34**): $-\dfrac{2}{27(z-3)} + \dfrac{5}{9(z-3)^2}$, a reguláris része (**D 24.34**) pedig a $\dfrac{2}{27z} + \dfrac{1}{9z^2}$ komplex függvény 3 körüli Taylor-sora. Mivel $\left(\dfrac{2}{27z} + \dfrac{1}{9z^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{9z^{n+1}}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{n+1}{z}\right)$, ezért **T 24.32** és **T 22.25** szerint:

$$\frac{2}{27z} + \frac{1}{9z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{3^{n+4}}(z-3)^n, \quad |z-3| < 3,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\frac{z}{(z+1)^3} = -\frac{2}{27(z-3)} + \frac{5}{9(z-3)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{3^{n+4}}(z-3)^n;$$

$K = \{z \in \mathbf{C};\quad 0 < |z-3| < 3\}$. Hasonlóan kapható meg a függvény 0 körüli Laurent-sora. Használjuk fel, hogy

$$\left(-\frac{2}{27(z-3)} + \frac{5}{9(z-3)^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(z-3)^{n+1}}\left(-\frac{2}{27} + \frac{5}{9} \cdot \frac{n+1}{z-3}\right),$$

ezért

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{2}{27z} + \frac{1}{9z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+3}{3^{n+4}z^n}; \quad K = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z| < 3\}.$$

180. A feladatot **T 22.5** segítségével oldjuk meg. Bontsuk fel az f függvényt elemi törtekre (l. a **150.** feladat megoldását):

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right).$$

Ha $|z| > 1$, akkor $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, ezért

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

Ha $|z| < 3$, akkor $\left|\dfrac{z}{3}\right| < 1$, ezért

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n}.$$

Ez az jelenti, hogy ha $1 < |z| < 3$, akkor az f Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}.$$

Ha $3 < |z|$, akkor $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$, s így

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}},$$

azaz ebben az esetben a Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-3^n)}{z^{n+1}}.$$

Ha $0 < |z+1| < 2$, akkor az $u = z+1$ helyettesítést alkalmazva $\left|\frac{u}{2}\right| < 1$. Emiatt az

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2u}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \frac{1}{2u}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{u}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}u^{n-1}$$

átalakításokkal az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$ Laurent-sort kapjuk.

Végül ha $0 < |z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Ebben az esetben a Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{n+1}-1)}{3^{n+1}}z^n.$$

Megjegyezzük, hogy a sor az f függvény 0 körüli Taylor-sora, és a $|z| < 1$ feltételt kielégítő körlapon is megadja a függvényt. Ezen a körlapon a függvény reguláris.

181. Ha $|z| < 3$, akkor a Laurent-sor az f függvény 0 körüli $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ Taylor-sora. Ha $|z| > 3$, akkor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$.

182. Ha $|z| < 1$, akkor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^{n+1}}{2^{n+1}}z^n$. (Ez a függvény Maclaurin-sora (**D 23.18**).) Ha $1 < |z| < 2$, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Ha $|z| > 2$, akkor

$$f(z) = \sum_{n=1}\frac{1-2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n.$$

183. A feladatot **T 22.5** segítségével oldjuk meg. Bontsuk fel az f függvényt elemi törtekre:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right).$$

Ha $|z| < 1$, akkor $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$, ezért:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}z^n,$$

$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}.$$

Ezekből $\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$. Ez éppen a függvény Maclaurin-sora (**D 23.18**). Ha $|z| > 1$, akkor $\left|\frac{i}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1$. A **181.** feladat megoldásához hasonlóan kapható, hogy ebben az esetben $\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}$.

Ha $|z-3| < \sqrt{10}$, akkor az $u = z-3$ jelölést alkalmazva:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{u+3}{(u+3)^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+3+i} + \frac{1}{u+3-i}\right).$$

Ha $|z-3| < \sqrt{10}$, akkor $\left|\frac{u}{3+i}\right| < 1$, s így:

$$\frac{1}{u+3+i} = \frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{3+i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{(3+i)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{u+3-i} = \frac{1}{3-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{3-i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{(3-i)^{n+1}}.$$

Ezekből:

$$\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left((3-i)^{n+1}+(3+i)^{n+1}\right)}{2\cdot 10^{n+1}}(z-3)^n.$$

Ha $|z-3| > \sqrt{10}$, akkor

$$\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left((3-i)^n+(3+i)^n\right)}{2\cdot(z-3)^{n+1}}.$$

184. Ha $|z| < 2$, akkor **M 24.37** szerint az f függvény 0 körüli Laurent-sora megegyezik a Maclaurin-sorával, tehát az

$$\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(z-2)^{n+2}}$$

egyenlőség felhasználásával **T 24.32** alapján

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} z^n.$$

Ha $|z| > 2$, akkor a **T 24.36** tételt használjuk fel a Laurent-sor együtthatóinak kiszámítására:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2},$$

ahol $\mathcal{G}$ olyan a körgyűrűben haladó és önmagát át nem metsző zárt rektifikálható görbe, amely 0-t megkerüli pozitív forgásiránnyal. A feltétel szerint 2 is $\mathcal{G}$ belsejében van. Ha a $\mathcal{G}_1$ a 0-t, $\mathcal{G}_2$ a 2-t belsejükben tartalmazó olyan görbék, amelyek teljesítik **M 24.29** feltételeit, akkor

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2}.$$

Ha $n \le -1$, akkor **T 24.24** és **T 24.31** szerint $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2} = 0$, így

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z-2)^2}\, dz = \left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)'_{z=2} = -\frac{n+1}{2^{n+2}}.$$

Ha $n \ge 0$, akkor

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)^{(n)}_{z=0} + \left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)'_{z=2} = 0.$$

Ezért a $|z| > 2$ esetben a Laurent-sor: $\displaystyle\frac{1}{(z-2)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{n+1}{2^{n+1}} z^n.$

185. A függvény 0 körüli Laurent-sora (**D 24.5**):

$$\frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} z^n,$$

azaz $\operatorname{Res}(0) = \frac{1}{2}$. Megoldható a feladat **T 24.45** segítségével is.

186. $\operatorname{Res}(0) = 1$.

187. A függvény 0 körüli Laurent-sora (**D 24.5**):

$$\frac{1}{z^4} \sum_{n+0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-4}}{(2n)!},$$

amiből $\operatorname{Res}(0) = 0$. Megoldható a feladat a **163.** feladat megoldása és a **T 24.45** tétel segítségével is.

188. A **T 24.43** tétel szerint:

$$\operatorname{Res}(3i) = \lim_{z \to 3i} (z - 3i) \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{e^{i \cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}.$$

Hasonlóan: $\operatorname{Res}(-3i) = i\dfrac{e^3}{6}$.

189. A **T 24.44** tétel szerint:

$$\operatorname{Res}(1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(-2^2\cos 2z) = -2\cos 2.$$

190. A **T 24.44** tétel szerint, ha $g(z) = e^{\pi z}$ és $h(z) = z^2+1$, akkor $h'(z) = 2z$ miatt:

$$\operatorname{Res}(i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{i\pi}}{2i} = \frac{i}{2}.$$

Hasonlóan: $\operatorname{Res}(-i) = -\dfrac{i}{2}.$

191. $\operatorname{Res}(0) = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Res}(1) = e.$ **192.** $\operatorname{Res}(0) = 0.$

193. $\operatorname{Res}(0) = \frac{1}{6}.$

194. A függvény -1 és 1 elsőrendű pólusai az ellipszisen belül belül vannak, ezért a reziduum-tétel és **T 24.44** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(1)+\operatorname{Res}(-1)) = 2\pi i\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}\right) = 2\pi i\operatorname{sh}1.$$

195. A függvény $k\pi i \quad (k = 0, \pm1, \pm2)$ elsőrendű pólusai vannak a körön belül. A reziduumokat **T 24.44** segítségével számíthatjuk ki. Az integrál értéke: 2π.

196. **T 6.16** szerint a függvény elsőrendű pólusai: $e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}} \quad (k = 0,1,2,3)$. Más izolált szinguláris helyei nincsenek. A körön belül a $e^{\frac{\pi i}{4}}$ és a $e^{\frac{7\pi i}{4}}$ elsőrendű pólusok vannak. A reziduumokat **T 24.44** segítségével számíthatjuk ki:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z^4+1} = -2\pi i\left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} - 2\pi i\left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{\frac{7\pi i}{4}}} = \frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

197. $\dfrac{2\pi i\operatorname{sh}3}{3}$. (Felhasználtuk a $\sin iz = i\operatorname{sh}z$ összefüggést is (**T 24.6**).)

198. A függvény szinguláris helyei az 1 másodrendű, valamint a $-i$ és i elsőrendű pólusok a kör belsejében vannak. A reziduumokat **T 24.44** és **T 24.45** alapján számítjuk ki:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = -2\pi i\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'_{z=1} -$$

$$2\pi i\left(\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right)_{z=-i} - 2\pi i\left(\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right)_{z=i} = 0.$$

199. A 0 ötödrendű pólus, ezért **24.45** szerint

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch}z}{z^5}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(0) = \frac{2\pi i}{4!}f^{(4)}(0) = \frac{i\pi}{12}.$$

Megjegyezzük, hogy pontosan ugyanazt a számítást kell elvégezni, mint a **146.** feladat megoldásában.

200. A $\mathcal{G}$ görbe belsejében csak az 1 elsőrendű pólus van. **T 24.44**-et alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy pontosan ugyanazt a számítást kell elvégezni, mint a **153.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $2\pi i\frac{e^2}{3}$.

201. A függvény 0 körüli Laurent-sora **D 24.5** alapján: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!}$. (A 0 lényeges szingularitás.) **D 24.42** szerint $\operatorname{Res}(0) = 1$, ezért az integrál értéke: $-2\pi i$.

202. **D 24.5** alapján: $e^{-\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n n!}$ és $\sin\frac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!}$. (A 0 lényeges szingularitás.) A reziduumot a két sor Cauchy-szorzatából (**D 22.31**) állapíthatjuk meg: $\operatorname{Res}(0) = 1$. Az integrál értéke: $2\pi i$.

203. A **172.** feladat megoldásában megmutattuk, hogy a függvénynek $z = -2$ az egyetlen izolált szinguláris helye, és ez lényeges szingularitás. A **172.** feladat megoldásában megadtuk a függvénynek -2 körüli Laurent-sorát is, amelyből: $\operatorname{Res}(-2) = -\frac{1}{2}$. Az integrál értéke: πi.

204. Az $\dfrac{1}{x^6+1}$ függvény páros (**D 10.9**), ezért $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$. A feladatot a **P 24.49** példában leírt módszerrel oldjuk meg. **T 6.16** szerint a függvény izolált szinguláris helyei az $e^{\frac{k\pi i}{6}}$ $(k = 1, 3, 5, 7, 9, 11)$ elsőrendű pólusok, amelyek közül $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$ esik a **P 24.49**-ben definiált $\mathcal{G}$ zárt görbe belsejébe. Adjuk meg a $|z| = r(> 0)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenletű $\mathcal{G}_1$ félkör pontjait a $z = re^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ exponenciális alakban (**D 24.8**), akkor $r \geq \sqrt[6]{2}$ esetben

$$\left|\frac{1}{z^6+1}\right| = \left|\frac{1}{r^6e^{i6\varphi}+1}\right| \leq \frac{1}{|r^6e^{i6\varphi}|-1} = \frac{1}{r^6-1} \leq \frac{1}{r^6-\frac{r^6}{2}} \leq \frac{2}{r^6}.$$

(Felhasználtuk, hogy bármely z_1 és z_2 komplex szám esetén $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ teljesül, ami a **T 6.6** háromszög-egyenlőtlenségből könnyen adódik.) A **P 24.49** példa megoldása alapján a számításokat elvégezve: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$.

205. $\sqrt{2}\pi$.

206. Oldjuk meg a feladatot a **P 24.49** példa megoldásában közölt módszerrel! Használjuk fel, hogy $|z| = r > 2$ esetén

$$\left|\frac{z^2}{(z^2+1)((z+1)^2+1)}\right| = \frac{|z|^2}{|z^2+1||(z+1)^2+1|} \leq$$

$$\frac{|z|^2}{(|z|^2-1)(|z+1|^2-1)} \leq \frac{4}{|z+1|} \leq \frac{1}{|z|-1} \leq \frac{8}{r}.$$

Az integrál értéke: $\dfrac{7\pi}{50}$.

207. Oldjuk meg a feladatot a **P 24.49** példa megoldása alapján! Használjuk fel, hogy $|z| = r > 4$ esetén

$$\left|\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\right| = \frac{|z|}{|(z+1)^2+4|} \leq \frac{|z|}{(|z+1|-2)(|z+1|+2)} \leq$$

$$\frac{2|z|}{|z+1|^2} \leq \frac{2|z|}{(|z|-1)^2} \leq \frac{8}{|z|}.$$

Az integrál értéke: $\dfrac{\pi}{2e^{2\pi}}$.

208. A $\mathcal{G}$ legyen a $[-r, r]$ intervallumból és az r sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörből álló zárt görbe pozitív irányítással. Ha $a < r$, akkor a $\mathcal{G}$ belsejébe esik a függvény ai harmadrendű pólusa, így a reziduum-tételt (**T 24.43**) alkalmazva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3} -$$

$$\int_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}(ai) - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3}\, dz \quad (z = x+iy).$$

A **T 24.45** tétel szerint:

$$\operatorname{Res}(ai) = \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{1}{(z+ai)^3}\right)''\right)_{z=ai} = \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{(z-ai)^3}{(z^2+a^2)^3}\right)''\right)_{z=ai} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Hasonló módon, mint a **P 24.49**-ben, kimutatható, hogy $\displaystyle\int_{\mathcal{G}_1} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\, dz = 0$, ami az jelenti, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\, dz = \frac{3}{8a^5}$.

209.

A feladatot **M 24.48** és **P 24.49** alapján oldjuk meg, de a $\mathcal{G}$ zárt görbét módosítjuk a bal oldali ábrán látható módon. ($\mathcal{G}$ két félkörívből és két szakaszból álló zárt görbe pozitív irányítással.) Legyen $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$. Az $r_1 (> 0)$ sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörrel kizárjuk a $\mathcal{G}$ zárt görbe belsejéből a függvény egyetlen szinguláris pontját, a $z = 0$ pontot. A Cauchy-féle integráltétel (**24.24**) szerint:

$$\int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Az első integrál $x \mapsto -x$ helyettesítéssel a következőképpen alakítható át:

$$\int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx.$$

Így az első és harmadik integrál összege: $2i\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

A $|z| = r_2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$ egyenletű $\mathcal{G}_2$ félkörön **T 24.22** alapján, az egyenlőtlenségnél a jobb oldali ábrát is figyelembe véve

$$\left|\int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ir_2e^{i\varphi}}}{r_2e^{i\varphi}} ir_2e^{i\varphi}\,d\varphi\right| = \left|i\int_0^{\pi} \frac{e^{ir_2\cos\varphi}}{e^{r_2\sin\varphi}}\,d\varphi\right| =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ir_2\cos\varphi}}{e^{r_2\sin\varphi}}\,d\varphi \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\frac{2r_2\varphi}{\pi}}}\,d\varphi = \frac{\pi}{2r_2}\left(1 - \frac{1}{e^{r_2}}\right).$$

Innen pedig látható, hogy $\displaystyle\lim_{r_2\to\infty}\int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$. A második integrál határértékének kiszámítására az $\dfrac{e^{iz}}{z}$ függvény $z = 0$ körüli Laurent-sorát (**T 24.36**) használjuk fel:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \frac{1}{z} + h(z),$$

ahol $h(z)$ a Laurent-sor reguláris részének (**D 24.34**) összegfüggvénye, ezért (akárhányszor) differenciálható, s így korlátos is a $\mathcal{G}_1$ félkörív mentén. **T 24.47** szerint $h(z)$ integrálja 0-hoz tart, ha $r_1 \to 0$. Az $\dfrac{1}{z}$ függvény integrálásánál $z = r_1e^{i\varphi} \quad (\pi \ge \varphi \ge 0)$. Így:

$$\lim_{r_1\to 0}\int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{r_1\to 0}\left(\int_{\pi}^{0} \frac{ir_1e^{i\varphi}}{r_1e^{i\varphi}}\,d\varphi + \int_{\mathcal{G}_1} h(z)\,dz\right) = -\pi i.$$

Ily módon: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

210. A **209.** feladat eredményét felhasználva parciális integrálással (**D 12.10**) kapjuk, hogy az integrál értéke $\frac{\pi}{2}$.

211. A $\sin 2x \sin 3x = \sin^2\dfrac{5x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$ azonosság és az előző feladat eredményének felhasználásával:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x \sin 3x}{x^2}\,dx = \frac{5}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\cdot\frac{5}{2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\,dx = \frac{5}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi.$$

212. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg. Az integrál értéke: $\frac{b\pi}{2}$.

213. A feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** alapján oldjuk meg. A $z = e^{ix}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ha $0 \leq x \leq 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x}\, dx = \oint_{\mathcal{G}} \frac{2\,dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}.$$

Az $\dfrac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ függvény izolált szinguláris helyei $2 - i$ és $\frac{2-i}{5}$ elsőrendű pólusok, amelyek közül csak az utóbbi esik a $\mathcal{G}$ kör belsejébe. A reziduum-tételt (**T 24.43**) és **T 24.44**-et alkalmazva, az integrál értéke: π.

214. Oldjuk meg a feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** példa alapján! Az integrál értéke: $\frac{\pi}{12}$.

215. $\frac{5\pi}{32}$.

216. A feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** alapján oldjuk meg. A $z = e^{ix}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ha $0 \leq x \leq 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\sin x}\, dx = \oint_{\mathcal{G}} \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b}.$$

Az $\dfrac{2}{bz^2 + 2aiz - b}$ függvény izolált szinguláris helyei az $\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ elsőrendű pólusok, amelyek közül csak a $\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ esik a $\mathcal{G}$ kör belsejébe. A reziduum-tételt (**T 24.43**) és **T 24.44**-et alkalmazva, az integrál értéke: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

217. $\dfrac{2a\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}$.

218. A **T 23.29** tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens, és **T 23.28** szerint az $x = m\pi \quad (m \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével mindenütt előállítja a függvényt. A **T 24.52** tétel alapján:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1 - e^{-ik\pi}}{2\pi k i} = \frac{1 - \cos k\pi}{2\pi k i} = i \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k}, \quad \text{ha} k \neq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy ha k páratlan, akkor $c_k = -\frac{i}{\pi k}$; ha pedig k páros, de nem 0, akkor $c_k = 0$. Továbbá

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dx = \frac{1}{2\pi} [x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ezért: $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$. (Megjegyezzük, hogy a Fourier-sor komplex alakjából könnyen megkapható a Fourier-sor szokásos (valós) alakja:

$a_0 = c_0, \quad a_{2n+1} = c_{2n+1} + c_{-(2n+1)} = 0$ és $b_{2n+1} = i(c_{2n+1} - c_{-(2n+1)}) = \frac{2}{\pi(2n+1)}$
$(n \in \mathbf{N})$ (**T 24.52** és **D 23.27**).)

219. A **T 23.29** tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens és **T 23.28** szerint az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével mindenütt előállítja a függvényt. A **T 24.52** tétel szerint, a parciális integrálást kétszer alkalmazva (**P 12.11**):

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{-2inx}\,dx = \left[-\frac{\cos x e^{-2inx}}{\pi}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2in}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{-2inx}\,dx =$$

$$\frac{2in}{\pi}\left[-\sin x e^{-2inx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4n^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{-2inx}\,dx = -\frac{4in\cos n\pi}{\pi} + 4n^2 c_n.$$

Ezért: $\sin x = \frac{4i}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1} e^{2inx}$. (**T 23.28** szerint az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ helyeken a sor összege egyenlő a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepével.)

220. A **T 23.29** tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens és előállítja a függvényt. A **T 24.52** tétel alapján:

$$e^x = \frac{e^2-1}{2e}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+in\pi)}{1+n^2\pi^2} e^{in\pi x}.$$

221. A **D 24.12**, **T 24.10** és **T 24.6** szerint:

$$z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln z} = e^{\frac{p}{q}(\ln r + i(\varphi + 2k\pi)}) = e^{\frac{p}{q}\ln r} \cdot e^{ip\frac{\varphi+2k\pi}{q}} =$$

$$r^{\frac{p}{q}}(\cos p\frac{\varphi+2k\pi}{q} + i\sin p\frac{\varphi+2k\pi}{q}) = r^{\frac{p}{q}}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{q} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{q})^p.$$

Ebből **T 6.14** és **T 6.16** alapján adódik az állítás.

222. A **14.** és a **10.264** feladatokat felhasználva:

$$|\sin(x+iy)| = |\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$\sqrt{\sin^2 x(1+\operatorname{sh}^2 y) + (1-\sin^2 x)\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

A második azonosság hasonlóan igazolható.

223. A **21.** feladatot felhasználva:

$$1 = |\cos^2 z + \sin^2 z| \le |\cos^2 z| + |\sin^2 z| = |\cos z|^2 + |\sin z|^2.$$

Ha z valós szám, akkor nyilvánvalóan egyenlőséggel igaz az állítás. Fordítva, legyen $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Az előző feladat alapján:

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = 1 + 2\operatorname{sh}^2 y \ge 1,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\operatorname{sh} y = 0$, amiből $y = 0$ adódik.

224. A **14.** feladatot is felhasználva:

$$\lim_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x+iy) = \lim_{y\to\infty} e^{-y}(\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y) =$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\sin x\frac{1+e^{-2y}}{2} + i\cos x\frac{1-e^{-2y}}{2}\right) = \sin x + i\cos x.$$

225. A **D 24.5** definíció és a **14.** feladat segítségével:

$$\lim_{y\to\infty} \operatorname{tg}(x+iy) = \lim_{y\to\infty}\frac{\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y} =$$

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\sin x + i\cos x \operatorname{th} y}{\cos x - i\sin x \operatorname{th} y} = \frac{\sin x + i\cos x}{\cos x - i\sin x} = i.$$

226. $\displaystyle\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{\sqrt{z^2+3}+2} = \frac{1}{2}.$
Második esetben a határérték nem létezik.

227. Mivel $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0$, ezért **M 24.20** szerint az állítás igaz.

228. $g(z) = if(z)$, és reguláris függvény konstansszorosa is reguláris.

229. Ha $u(x) = ax+b \quad (x \in D_1$, és $v(y) = ay+c \quad (y \in D_2)$, akkor **T 24.16** szerint az $f(z) = u(x) + iv(y)$ komplex függvény differenciálható a D halmazon. Fordítva, tegyük fel, hogy az $f(z) = u(x) + iv(y)$ függvény differenciálható a D halmazon. Ekkor **T 24.14** alapján

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

a D halmazon. Mivel u csak x-től, v csak y-tól függ, ezért $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ is legfeljebb x-től, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ is legfeljebb y-tól függhet. Így az első differenciálegyenlet csak úgy teljesülhet, ha egyik sem függ sem x-től, sem y-tól, vagyis

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \text{konstans}.$$

Ebből nyilvánvalóan adódik az állítás.

230. Az állítás **T 24.14**-ből adódik, felhasználva Szász G., Matematika II., 55. o. 15.2.3 tételét.

231. $f'(0) = \displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = 0.$

232. Az állítás **T 24.14**-ből adódik.

233. Legyen f reguláris valamely összefüggő nyílt halmazon és $|f| = c(=$ állandó$)$. Ha $c = 0$, akkor $f = 0$, és a bizonyítással készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $c \neq 0$, és legyen $f = u + iv$. Ekkor $u^2 + v^2 = c^2$, és ebből differenciálással:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek (**T 24.14**) figyelembevételével ezekből

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} = uv\frac{\partial u}{\partial y} = -v^2\frac{\partial u}{\partial x}$$

következik, amiből $c^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ adódik, s így $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. **T 24.14** és az előző feladat szerint igaz az állítás.

234. **T 24.14**-ből és a **232.** feladatból adódik az állítás.

235. Ha $n \geq 0$, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint igaz az állítás. (Ebben az esetben z_0 bárhol lehet!) Ha $n < 0$, akkor a Cauchy-féle integrálformulákból (**T 24.31**) adódik az állítás az $f(z) = 1$ függvény felhasználásával.

236. **T 24.22** és **T 24.27** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}}\,d\varphi = i\int_0^{\pi} e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\,d\varphi = \left[2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\right]_0^{\pi} = 2(1-i).$$

237. A **97.** és **101.** feladat megoldását is felhasználva **T 24.27** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{\ln^3 z}{z}\,dz = \left[\frac{\ln^4 z}{4}\right]_1^i = \frac{\pi^4}{64}.$$

238. Ha z_0 nincs $\mathcal{G}$ belsejében, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy z_0 a $\mathcal{G}$ belsejében van. Ha M az f-nek egy korlátja az E halmazon és $\mathcal{K}_r$ E-beli, $\mathcal{G}$ belsejében haladó r sugarú z_0 középpontú kör, akkor **T 24.28** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz.$$

Szász G., Matematika II., 24.5.7 tételét is felhasználva:

$$\left|\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz\right| \leq M2r\pi.$$

Ebből következik, hogy $\lim\limits_{r\to 0}\displaystyle\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz = 0$, azaz az állítás ebben az esetben is igaz.

239. Az $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ teljesíti az előző feladat feltételeit, ezért a **238.** feladat eredményét is felhasználva:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\mathcal{G}} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

240. A szinguláris helyeket vegyük körül például olyan kis körökkel, amelyek $\mathcal{G}$ belsejében, de egymás külsejében haladnak; ekkor a reziduum definíciójából (**D 24.42**) és a **T 24.36** tételből közvetlenül adódik az állítás.

241. Az Euler-formulát (**T 24.6**) felhasználva kapjuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $\cos\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{p}} + e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2}$ és $\sin\frac{n\pi x}{p} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{p}} - e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2i}$. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{\frac{i\pi nx}{p}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-\frac{in\pi x}{p}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}},$$

ahol $n > 0$ esetben **D 23.26** szerint: $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} =$

$$\frac{1}{2p}\left(\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx - i\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx\right) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

Hasonlóan: $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{\frac{in\pi x}{p}}$, amiből $n \mapsto -n$ helyettesítéssel kapjuk az állítást negatív indexű c_n együtthatókra. Ha $n = 0$, akkor $c_0 = a_0$.

242. Jelöljük $\mathcal{G}$-vel a $|z| = 1$ egyenletű kört. A **T 24.36** és a **T 24.22** tételek szerint:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{ix})}{e^{i(n+1)x}} ie^{ix}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})e^{-inx}\,dx$$

($n \in \mathbf{Z}$), amelyek **24.52** szerint éppen az $f(e^{ix})$ függvény komplex alakban felírt Fourier-sorának együtthatói.