MATEMATIKA A3 VIZSGAKÉRDÉSEK – 2009

T tétel, **D** definíció, **B** kötelező bizonyítás, **P** példa
A vizsgán lesz néhány egyszerű, nem-számolós *feladat* minden témából, és *definíciókra*, *tételek* ismeretére, valamint egy *bizonyításra* vonatkozó kérdés. A vizsgán sem írásos segédlet sem zsebszámológép nem használható! A felkészüléshez segédanyagok a Thomas 2. és 3. kötetben, valamint a honlapon.

1. Vektorértékű függvények (Thomas 3, 13. fejezet) **D** térgörbe megadása egy $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel **D** vektorfüggvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága **D** sebességvektor, sebesség, mozgásirány, gyorsulásvektor **T** differenciálási szabályok **B** állandó hosszúságú (állandó abszolút értékű) vektorfüggvények deriváltja **D** vektorfüggvény határozatlan és határozott integrálja **D** sima görbe ívhossza, ívhosszparaméter **T** $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = |\mathbf{v}(t)|$ **P** áttérés ívhosszparaméterre **D** normált érintővektor (**T** vektor) **D** görbület **B** görbület kiszámolása **D** normált főnormális ($\mathbf{N}(s)$, azaz ha a görbe ívhosszparaméteresen van megadva) **T** normált főnormális kiszámítása tetszőleges paraméterezés esetén ($\mathbf{N}(t)$) **D** simulókör **D** binormális egységvektor (**B**), torzió **T** további képletek görbület és torzió kiszámítására

2. Integrálás vektormezőben (Thomas 3, 16. fejezet) **D** vonalintegrál **T** vonalintegrál kiszámítása **D** vektormező = vektor-vektor függvény, skalárfüggvény gradiensmezője (potenciáltere) **D** munka sima görbe mentén, mint az $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ vonalintegrálja a görbén **T** képletek a munka kiszámítására **D** áramlási integrál, cirkuláció **D** azok a fogalmak/feltételek, melyek ismerete/fennállása a következő tételekben szükséges: szakaszonként sima görbe, összefüggő/egyszeresen összefüggő nyílt halmaz... **D** útfüggetlenség, konzervatív erőtér, potenciálfüggvény **T** vonalintegrálok alaptétele (útfüggetlenség ≡ a vektormező potenciálos) **T** integrál zárt görbe mentén, konzervatív erőtérben **P** komponens-teszt a konzervativitás ellenőrzésére ($\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}, \ldots$), potenciálfüggvény meghatározása **D** felület felszíne **P** felszín kiszámítása implicit függvénnyel adott felület esetén **D** skalárfüggvény felületmenti integrálja **D** vektormező felületmenti integrálja (fluxus) **D** felületek megadása (függvénygrafikonnal, implicit függvénnyel, paraméteresen) **P** henger, kúp, gömb paraméterezése **P** felszín kiszámítása paraméteresen adott sima felület esetén ($\int\int |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$) **P** felületi integrál paraméteresen adott sima felület esetén **D** rotáció **T** Stokes-tétel **T** zárt görbén vett integrál 0 volta és $\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ közötti összefüggés **D** divergencia **T** Gauss–Osztrogradszkij-tétel

3. Komplex függvények differenciálása és integrálása **D** komplex függvény differenciálhatósága, **B** Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletek, a diffhatóság szükséges feltétele **T** a diffhatóság elégséges feltétele (ha u és v diffhatók (x_0, y_0)-ban, és teljesülnek a Cauchy–Riemann-féle diffegyenletek, akkor $f = u + iv$ diffható az $x_0 + iy_0$ pontban) **D** komplex elemi függvények (e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ definiálása hatványsorokkal) **D** görbe megadása $t \to z(t)$ függvénnyel **P** z_0 középpű R sugarú kör megadása **C**-ben **D** komplex integrál **T** az integrál legfontosabb tulajdonságai **P** $\int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z$ **B** $\int_{|z-a|=R} (z-a)^n\,\mathrm{d}z$ **D** reguláris (= holomorf = analitikus) függvény **T** Cauchy-féle integráltétel, és következményei, integrálás olyan görbe mentén, mely több szinguláris pontot zár körbe, **P** $\int_{K(0,2)} (2z-1)/(z^2-z)\,\mathrm{d}z$ (elemi törtekre bontással is) **T** Cauchy-féle integrálformulák, reguláris függvények többszöri differenciálhatósága

4. Differeciálegyenletek **D** közönséges de., parciális de., explicit, implicit, k-adfokú, homogén, inhomogén, fokszám nélküli de., (k-változós polinomfüggvény és fokszáma), de. rendje, **D** k.é.p., görbesereg, iránymező **P** $y' = x - y$ iránymezője **T** Cauchy–Peano-féle egzisztenciatétel ($n = 1, 2$-re is) **D** Lipschitz-feltétel **T** elegendő feltétel a Lipschitz-feltétel teljesüléséhez **T** Picard–Lindelöf-féle unicitástétel **D** elsőrendű de. **B** az $y = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ k.é.p. és az $y = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ integrálegyenlet ekvivalenciája **T** az elsőrendű de. megoldása fokozatos közelítéssel ($y_0 = \eta$, $y_{n+1} = \eta + \int_\xi^x f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t$) **D** szétválasztható változójú és ilyenekre vezető de.-k **T** és megoldhatóságuk **T** elsőrendű lineáris de.-k megoldhatósága **P** multiplikátoros vagy a konstans variálásának módszere, pl. az $y' = x - y$ és $y' = 1 + 2xy$, $y(2) = 3$ megoldása **D** egzakt de.-k **T** az egzaktság feltétele a parciális deriváltakkal **P** egzakt de.-k megoldása **T** multiplikátorral egzakttá tehető de.-k

5. Másodrendű homogén lineáris de. **B** Homogén lineáris de. megoldásainak lineáris kombinációi is megoldások **T** h.l.de. megoldhatósága és összes megoldása **D** állandó együtthatós de. karakterisztikus egyenlete, **T** különböző gyökökhöz tartozó megoldások lineáris függetlensége **B** e^{tx} m.o., ha t gyök **P** alaprendszer előállítása a karakterisztikus egyenlet gyökeiből, többszörös és komplex gyökök esetén is

6. Inhomogén lineáris de.: **T** inhomogén lin.de. összes megoldása **P** állandó együtthatós inhomogén lin.de. (próbafüggvény módszer), $f(x) = e^{ux}(P_n(x)\cos vx + Q_m(x)\sin vx)$, ha $u + iv$ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke, és spec. esetei **B** konstansok variálása (levezetés másodrendű lineáris de.-re)

7. Differenciálegyenlet-rendszer **P** Magasabb rendű de. visszavezetése elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre **P** kétismeretlenes elsőrendű homogén lineáris de.-rendszer megoldása, ha a sajátértékek valósak