MAT A3 – 2. ZH. – 2009. december 4. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Számítsuk ki az $f(z) = \operatorname{Im} z^2$ függvény integrálját a i és az 1 pontokat összekötő szakasz mentén. *(6 pont)*

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ahol $\mathcal{K}$ az $2i$ középű $\sqrt{2}$ sugarú kör. *(8 pont)*

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{1}{(z^2+1)^2} + \frac{e^{-2z}}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

3. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát! *(6 pont)*

$$\left(\frac{y+1}{2x}\right) y' = e^{-y}, \quad y(2) = 0.$$

4. Az a paraméter mely értékei mellett lesz egzakt az alábbi differenciálegyenlet? E paraméterérték mellett oldjuk meg az $y(1) = 1$ feltétellel megtoldott kezdeti érték problémát! *(6 pont)*

$$\left(\frac{3x^2}{y^2} - 2\frac{y^3}{x^3}\right) + \left(a\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{x^3}{y^3}\right) y' = 0$$

5. Adjuk meg annak az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek az általános megoldását, amelynek karakterisztikus egyenlete *(2 pont)*

$$(t-1)^3(t-3-2i)(t-3+2i) = 0.$$

6. Írjuk fel, hogy az alábbi inhomogén differenciálegyenletek egyik partikuláris megoldását milyen alakban érdemes keresni: *(6 pont)*

a) $y''' + 4y'' - 5y' = e^x$

b) $y''' + 4y'' - 5y' = 2x$

c) $y''' - 4y'' + 5y' = e^{2x}\cos x$

7. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! *(8 pont)*

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 12\sin 2x.$$

8. Tudjuk, hogy az $xy'' - 2y' = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer két megoldása $Y_1 = 1$ és $Y_2 = x^3$. Mutassuk meg, hogy e függvények alaprendszert alkotnak a számegyenesen. A konstansok variálásával oldjuk meg az $xy'' - 2y' = x^3$ inhomogén lineáris egyenletrendszert! *(8 pont)*