1. MAT A3 vizsga. 2009-01-06 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________ Gyak: CsM KS LE

1. *(6)* Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Munka sima görbe mentén:

b) Reguláris függvény:

c) Az $f(x, y)$ függvény eleget tesz a Lipschitz-felételnek egy D tartományon a második változójában, ha

2. *(5)* Vezessük le az $\mathbf{r}(t)$ sima görbe görbületének kiszámítására vonatkozó képletet!

3. *(8)* Vezessük le a konstansok variálásának módszerét adó egyenletrendszert az $y'' + ay' + by = g$ másodrendű lineáris differenciálegyenletre.

4. *(6)* Mi a kapcsolat az A és B állítások között? (Lehetséges válaszok: $A \implies B$, $B \implies A$, $A \iff B$ vagy NINCS).

(a) Adva van egy egyszeresen összefüggő D tartomány, és azon értelmezve van a $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ differenciálegyenlet, valamint P és Q parciális deriváltjai léteznek és folytonosak D-n.
A : A diffegyenlet egzakt a D tartományon.
B : $P'_y = Q'_x$ a D tartományon.

(b) A komplex $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény
A : eleget tesz a Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenleteknek a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban.
B : differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban;

(c) Egy homogén lineáris differenciálegyenlet
A : megoldásai között az $y_1, y_2 \ldots, y_n$ függvények alaprendszert alkotnak.
B : összes megoldása az $y_1, y_2 \ldots, y_n$ függvények lineáris kombinációjaként előáll.

5. *(5)* Tegyük fel, hogy a D háromdimenziós térrészre, annak zárt S határfelületére fennállnak a Gauss–Osztrogradszkij-tétel feltételei. Jelölje a $\mathbf{v} : \mathbf{r} \to \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező felületmenti integrálját $\int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma$, az $f : \mathbf{r} \to f(\mathbf{r})$ skalárfüggvény térfogati (hármas-) integrálját $\int_D f(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V$, az S felszínét $|S|$, a D térfogatát $|D|$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? Adjunk egy-két szavas indoklást!

a) $\displaystyle\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = 3|D|$ ☐

b) $\displaystyle\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = 0$ ☐

c) $\displaystyle\int_S \mathbf{rot}\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = 3|S|$ ☐

d) $\displaystyle\int_S \mathbf{rot}\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = 0$ ☐

e) $\displaystyle\int_D \mathrm{div}\, \mathbf{r}\, \mathrm{d}V = 3|D|$ ☐

6. *(20=3+2+2+2+2+3+2+4?)* Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a) Hogy szól a vonalintegrálok alaptétele? Pontosan soroljuk fel azokat a feltételeket is, amelyek szükségesek a tétel állításának igaz voltához.

b) Mutassuk meg, hogy az $f(x+iy) = |y| + i|x|$ komplex függvény *nem* differenciálható az első síknegyedben ($x > 0$, $y > 0$), de differenciálható a második síknegyedben ($x < 0$, $y > 0$).

c) A $2y''' - \sin(xy'') + y' \cos y = 0$, $y(\xi) = \eta_0$, $y'(\xi) = \eta_1$, $y''(\xi) = \eta_2$ kezdetiérték-probléma tetszőleges valós ξ, η_0, η_1, η_2 konstansok esetén megoldható. A Cauchy–Peano-tétel szerint melyik függvény milyen tulajdonságát kell ehhez ellenőrizni? Úgy írjuk fel e függvényt, hogy változóit x_0, x_1, $x_2 \ldots$ jelölje!

d) Tekintsük azt a 2-sugarú végtelen hengerfelületet, melynek szimmetriatengelye az y-tengely. Írjuk fel az első térnyolcadba eső részének egy paraméterezését!

e) Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = [1, t, t^2]$ görbe $t = 2$ paraméterhez tartozó pontjában a torziót!

f) Az $y'' - 2y' + 5y = x \sin 2x$ és az $y'' - 2y' + 5y = xe^x \sin 2x$ differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

g) Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{z^2}\,\mathrm{d}z$ értékét, ha $\mathcal{G}$ az origó középpontú egységsugarú kör.

h) Oldjuk meg az $x' = 3x + y$, $y' = -x + y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ha tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix kétszeres multiplicitású sajátértéke 2, egy hozzá tartozó sajátvektora $(1, -1)$.