

1. (6) Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Egzakt differenciálegyenlet:

b) Potenciálfüggvény:

c) Torzió:

2. (4) Mutassuk meg, hogy ha r gyöke az $at^2 + bt + c = 0$ egyenletnek, akkor e^{rx} megoldása az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletnek!

3. (5) Mutassuk meg, hogy ha az $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ helyen, akkor $u'_y(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)$.

4. (4) Mutassuk meg a Picard–Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével, hogy az $xy'' = \sin(yy')$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható!

5. (11 212222) Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanultak felhasználásával úgy, hogy igazak legyenek!

a) Egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei -1 (kétszeres), $2 + i$, $2 - i$ (egyszeres), jobb oldala xe^{-x} .
A hozzá tartozó homogén rész általános megoldása: ...

Próbafüggvény az inhomogén megoldására: ...

b) Ha $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ívhosszparaméterezés, akkor $\mathbf{r}''(s) \cdot N(s) = \dots$

c) e^z legkisebb periódusa ... , értékészlete ...

d) Adva van egy ...
 D tartomány, és azon értelmezve van a $P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ differenciálegyenlet, valamint D -n P és Q ...

Ekkor a differenciálegyenlet pontosan akkor egzakt a D tartományon, ha ott ...

e) Adva van egy nyílt...
 D tartomány, amelyen az $\mathbf{F} = [M, N, P]$ vektor-vektor függvény komponensei...
Akkor és csak akkor létezik D -n \mathbf{F} -nek potenciálfüggvénye, ha minden $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integrál...

f) Egy $\mathbf{F} = [M, N, P]$ vektormező cirkulációja az...
 S felületet határoló \mathcal{G} görbén megegyezik a ...
függvény S felületen vett felületmenti integráljával, ha \mathcal{G} úgy van irányítva, hogy...

6. (20 33221234) Végezzük el az alábbi számításokat!

a) Számítsuk ki az alábbi integrált: $\oint_{|z|=2} \operatorname{Re} z + e^z + \frac{1}{z} dz =$

e) Írjuk fel azt az integrálegyenletet, mely ekvivalens az $y' = x + y$, $y(0) = 1$ kezdetiérték-problémával!

f) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = [x + y, x + z, -x]$ vektormező felületi integrálját az $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományhoz tartozó $(u, v) \mapsto (u^2 + v^2, -u^2, -v^2)$ felületen.

b) Oldjuk meg az $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y(0) = 2$ kezdetiérték-problémát!

g) Számítsuk ki a $z = xy$ felület $x^2 + y^2 = 1$ henger belsejébe eső darabjának felszínét.

c) Adjuk meg azt az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása $x + C_1 e^x + C_2$.

h) Oldjuk meg az $x' = -4x + y$, $y' = -x - 2y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ha tudjuk, hogy az $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix kétszeres multiplicitású sajátértéke -3 , egy hozzá tartozó sajátvektora $(1, 1)$.

d) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = [xy, 1 + xy, 1 - yz]$ vektormező felületi integrálját annak az egységkockának a határfelületén, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal, és két csúcsa $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$.