1. MAT A3 vizsga. 2009-01-13 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Gyakv: ______

1. *(6)* Definiáljuk a következő fogalmakat!

a) Ívhosszparaméter:

b) Egzakt differenciálegyenlet:

c) Komplex változós exponenciális függvény:

2. *(4)* Mutassuk meg, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásainak lineáris kombinációi is megoldások.

3. *(4)* Bizonyítsuk be, hogy $\int_{\mathcal{G}}(z-z_0)^n \, \mathrm{d}z = 0$, ha $n \neq -1$, és $\mathcal{G}$ egy z_0 középű R sugarú kör.

4. *(4)* Mutassuk meg a Picard–Lindelöf-tétel feltételeinek ellenőrzésével, hogy az $x^2y'' + x^3y' - x^4y = \sin x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$ kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható!

5. *(8 332)* Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanultak felhasználásával úgy, hogy igazak legyenek! Mindhárom állításban használjuk a ∇ szimbólumot!

a) Ha ... fennáll egy ... D tartomány minden pontjában, akkor bármely D-ben haladó síma zárt görbére ...

b) Egy $\mathbf{F} = [M, N, P]$ vektormező cirkulációja az...

S felületet határoló $\mathcal{G}$ görbén megegyezik a ...

függvény S felületen vett felületmenti integráljával, ha $\mathcal{G}$ úgy van irányítva, hogy...

c) Legyen S egy ... felület, melynek $\mathbf{n}$ a kifelé mutató normálvektorokból álló vektormezője, és V a felület által határolt tartomány. Ekkor az $\mathbf{F}$ vektormező S felületmenti integráljára igaz az alábbi egyenlőség:

6. *(3)* Az $\mathbf{F} = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ vektormező pontosan akkor konzervatív a D tartományon, ha

$$\frac{\partial M}{\partial \ldots} = \frac{\partial N}{\partial \ldots}, \ldots$$

Milyen feltételek fennállása esetén igaz a fenti állítás?

D:

M, N, P:

7. *(21 434235)* Végezzük el az alábbi számításokat!

a) Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ görbe ívhosszparaméteres alakját!

b) Határozzuk meg az $\mathbf{F} = (2xy, x^2 + z, y)$ vektormező potenciálfüggvényét!

c) Oldjuk meg az $y' = x - y$, $y(3) = 2$ kezdetiérték-problémát!

d) Az $y'' - 6y' + 10y = x^2 \cos x$ és az $y'' - 6y' + 10y = xe^{3x} \sin x$ differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

e) Számítsuk ki $\int_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^2 - z}\,dz$ értékét, ha $\mathcal{G}$ az origó középpontú 2 sugarú kör.

f) Oldjuk meg az $x' = x - 2y$, $y' = 2x + 5y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert az $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ kezdeti feltételekkel, ha tudjuk, hogy az $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ mátrix kétszeres multiplicitású sajátértéke 3, egy hozzá tartozó sajátvektora $(1, -1)$.