

1. Mekkora munkát végez az $\mathbf{F} = (y-x, z-y, x-z)$ erőter az $\mathbf{r}(t) = (1, t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$ görbe mentén? (4 pont)

5. Adjuk meg az $x^2 + z^2 = 4$, $0 \leq y \leq 3$ hengerpalást egy paraméterezését! (2 pont)

2. Lehet-e potenciális az $\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (?, e^{xz}, ye^{xz})$ függvény, ha első koordinátafüggvényét megfelelően választjuk? (2 pont)

6. Számítsuk ki az $\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, xyz)$ divergenciáját és rotációját! (2 pont)

3. Adjuk meg az $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^z + 2xy, x^2, xe^z)$ vektorvektor függvény potenciálfüggvényét, és számítsuk ki az integrálját az egységkocka csúcsain áthaladó alábbi töröttvonalon: (2 pont)

$$(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 0)$$

7. Soroljunk fel négy különböző állítást, melyek azzal ekvivalensek, hogy a D tartományon értelmezett $\mathbf{F} = (M, N, P)$ vektormező potenciális (a potenciálosság definíciója is felsorolható). Külön soroljuk fel azokat a feltételeket, melyek fennállása elégséges az ekvivalenciákhoz. (5 pont)

4. Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ egyenlettel megadott csavarvonal (a) ívhossz szerinti paraméterezését, (b) görbületét, (c) normált főnormálisát a görbe egy tetszőleges pontjában! (10 pont)

8. Melyek igazak az alábbi állítások közül? Amelyik hamis, javítsuk ki egy hasonló, tanult állításra! (6 pont)

- a) $\operatorname{rot} \operatorname{div} f = \mathbf{0}$.
- b) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{N}$.
- c) Ha $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1$ az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor $\dot{\mathbf{r}}(t) \perp \mathbf{r}(t)$.
- d) A komplex ch függvény periodikus, periódusa 2π .
- e) A $g(x, y, z) = c$ felület felszíne egy korlátos zárt T síktartomány fölött

$$\iint_T \frac{\nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} dA,$$

ahol \mathbf{p} a T síkjának egy egységnyi normálvektora, és $\nabla g \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

f) Minden felület irányítható.

9. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$, $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ paraméterezéssel megadott kúp felszínét! (4 pont)

10. Számítsuk ki az $\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (4xyz, 2yz, z)$ függvény felületmenti integrálját az egységkocka felszínén (az egységkocka csúcsai a (c_1, c_2, c_3) pontok, ahol $c_i = 0$, vagy $= 1$, ahol $i = 1, 2, 3$). (5 pont)

11. Mutassuk meg, hogy komplex számokra is érvényes a

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

összefüggés.

(4 pont)

12. Egy komplex reguláris $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény valós része $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, ahol $z = x + iy$. Határozzuk meg az f' deriváltfüggvényt! Fejezzük ki az eredményt z függvényében is! (4 pont)