1. MAT A3 vizsga. 2012-01-05 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. *(5)* Mi a kapcsolat az A, B és C állítások között? (Lehetséges válaszok: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$, $A\,\text{NINCS}\,B$, és ezek A és C, valamint B és C közt: $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C\ldots$).

(a) A : Az $\mathbf{r}(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ görbe ívhosszparaméteres;
B : bármely két t_1 és t_2 paraméterű pont közti ívhossz $|t_2 - t_1|$;
C : minden t helyen $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}''(t)$.

(b) A komplex $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény
A : reguláris a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban;
B : kielégíti a következő egyenleteket:
$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$;
C : differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban;

2. *(3)* Melyik alábbi differenciálegyenletnek alkotják alaprendszerét az $y_1 = e^x$, $y_2 = x+1$ függvények, és amelyiknek nem, annak miért nem?

a) $y''' - y'' = 0$

b) $y'' - y'x = 0$

c) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$

3. *(3)* Az alábbi függvények között egyetlen egy forrásmentes, egyetlen egy örvénymentes és egyetlen egy potenciálos van. Keressük meg mindegyiket, és igazoljuk e tulajdonságukat!

a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2y, xz, 1-2xyz)$, *b)* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\frac{z}{y}, -\frac{xz}{y^2}, \frac{x}{y}\right)$,
c) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2y, xz, 3)$.

4. *(2)* Írjuk le a Cauchy-féle integráltételt!

5. *(3)* Igazoljuk az $\mathbf{r}(t)$ paraméterezéssel megadott görbe görbületének kiszámítására vonatkozó képletet!

6. *(4)* Igazoljuk, hogy $\displaystyle\int_{|z-1|=r} \frac{1}{(z-1)^n} = 0$, ha $n \neq 1$.

7. *(5)* Bizonyítsuk be a hányadoskritérium következő változatát: a pozitív tagú $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens, ha tagjaira igaz, hogy $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} < q < 1$.

8. *(6)* Az alábbi differenciálegyenletek közül melyik egzakt, melyik szétválasztható változójú, és melyik lineáris? A választ egy I vagy H beírásával adjuk meg, és a képlet megfelelő átrendezésével, vagy számítással igazoljuk!

a) $y' \sin x + y \cos x = 0$

☐ szétválasztható:

☐ egzakt:

☐ lineáris:

b) $2xyy' + y^2 - 1 = 0$

☐ szétválasztható:

☐ egzakt:

☐ lineáris:

c) $xyy' + y^2 - x = 0$

☐ szétválasztható:

☐ egzakt:

☐ lineáris:

9. *(4)* Az alábbi differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?
(a) $y'' - y = x^2$,

(b) $y'' - y = x \sin x$,

(c) $y'' - y = e^x$,

(d) $y'' - y = xe^x$

10. *(3)* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y + z, y)$ vektormező felületmenti integrálját az $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ paramétertartományhoz tartozó $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, -u^2 - v^2, v^2)$ képlettel paraméterezett felületen fölfelé mutató normálvektorral.

11. *(3)* Mi az alábbi sor összege, és milyen x helyeken konvergens?

$$1 + \pi x + \frac{\pi(\pi-1)}{1 \cdot 2} x^2 + + \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \\ + \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots$$

12. *(3)* Adjuk meg azt az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása $x^2 + C_1 e^{2x} + C_2$.

13. *(5)* Oldjuk meg az $x' = 3x + 2y$, $y' = 2x + 6y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = -2$, $y(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!