3. MAT A3 vizsga. 2012-01-12 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________

1. *(9)* Egészítsük ki az alábbi állításokat a tanult definíciók, illetve tételek szerint úgy, hogy igazak legyenek!

a) e^z legkisebb periódusa ... , értékkészlete ...

b) Definíció szerint egy D tartomány egyszeresen összefüggő, ha bármely D-beli...

c) Legyen D egy ...

tartomány a komplex síkon. Legyen az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény ...
Ekkor f bármely D-ben haladó sima, zárt görbén vett integrálja 0.

d) (Stokes-tétel) Legyen $\mathbf{F} = (M, N, P)$ egy vektormező. Legyen S egy ... felület, melynek $\mathcal{G}$ a határoló görbéje, és amely úgy van irányítva, hogy...

Ekkor $\mathbf{F}$ cirkulációja $\mathcal{G}$-n megegyezik a...

függvény S felületen vett felületmenti integráljával, azaz képletben:

2. *(4)* Az alábbi differenciálegyenletnek milyen alakban keressük egy-egy partikuláris megoldását?

(a) $y'' - y' = x^2$,

(b) $y'' - y' = x \sin x$,

(c) $y'' - y' = e^x$,

(d) $y'' - y' = xe^x$

3. *(4)* Számítsuk ki $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$ értékét, ha $\mathcal{G}$ a $|z-1| = 1$ egyenletű kör.

4. *(4)* Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ hatványsor konvergenciatartományát!

5. *(3)* Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = [xz, 1 - yz, yz]$ vektormező felületi integrálját annak az egységkockának a határfelületén, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal, és két csúcsa $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$.

6. *(6)* Tekintsük az $(x, y) \mapsto (3x^2y^2 + 1, 2x^3y)$ függvényt.

(a) Mutassuk meg, hogy potenciálos, és határozzuk meg a potenciálfüggvényt!

(b) Oldjuk meg a $3x^2y^2 + 1 + 2x^3yy' = 0$ differenciálegyenletet!

7. *(4)* Igazoljuk az állandó abszolút értékű vektorfüggvény deriváltjára vonatkozó tételt!

8. *(6)* Oldjuk meg (a konstansok variálásának módszerével) az $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ differenciálegyenletet!

9. *(4)* Mutassuk meg, hogy ha r gyöke az $at^2 + bt + c = 0$ egyenletnek, akkor e^{rx} megoldása az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletnek!

10. *(6)* Oldjuk meg az $x' = 4x + 3y$, $y' = 2x - y$ homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert, majd keressük meg az $x(0) = 4$, $y(0) = -1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!