1. Házi feladat (határidő: 2016-02-26)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(0,1,2),(1,2,3),(1,2,4)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Jelölje az $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakját $\mathbf{x}_\mathcal{B}$, illetve $\mathbf{y}_\mathcal{B}$. Keressük meg azt a $\mathbf{C}$ mátrixot, mellyel a skaláris szorzat a vektorok $\mathcal{B}$-beli alakjából is kiszámolható a

   $$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}_\mathcal{B}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{y}_\mathcal{B} \tag{1}$$

   képlettel.

2. Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisa. Mutassuk meg, hogy mindig létezik egy olyan **szimmetrikus** $\mathbf{C}$ mátrix, mellyel tetszőleges $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ vektorokra fennáll az (1) összefüggés.

3. *(a)* Adjuk meg az összes olyan **diagonális** $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, melyhez van olyan $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben, hogy tetszőleges $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ vektorokra fennáll az (1) összefüggés.

   (b) Az *(a)* feladat eredményét fölhasználva mutassuk meg, hogy van olyan szimmetrikus $\mathbf{C}$ mátrix, hogy az (1) semelyik $\mathcal{B}$ bázisra sem igaz!

4. Mekkora szöget zárnak be a $(0,1,2,3,4)$ és a $(3,1,4,2,0)$ vektorok?

5. Adjuk meg az

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & -3 & -9 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   mátrix kitüntetett altereinek egy-egy **ortogonális** bázisát!

6. Adjuk meg egy **ortonormált** bázisát az alábbi vektorok által kifeszített térnek a Garam–Schmidt-ortogonalizációval!

   (a) $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,4,0,2)$, $\mathbf{v}_4 = (1,2,3,6)$,

   (b) $\mathbf{v}_1 = (0,1,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{v}_4 = (1,3,1,-1)$.

7. Legyen $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-1,-1,1)$.

   (a) Igazoljuk, hogy $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4\}$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben!

   (b) Írjuk fel azt a képletet, mely megadja egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor fenti bázisra vonatkozó i-edik koordinátáját ($i = 1,2,3,4$)!

8. *(a)* Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ vektornak az $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4)$ altérre eső merőleges vetületét (a vektorokat ld. az előző feladatban)!

   (b) Bontsuk fel $\mathbf{x}$-et egy $\mathcal{V}$-be és egy $\mathcal{V}^\perp$-be eső vektor összegére!

   (c) Adjunk másik megoldást az *(a)* feladatra!

9. Legyen

   $$\mathbf{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -4/5 & -3/5 \\ 4/5 & -9/25 & 12/25 \\ 3/5 & 12/25 & -16/25 \end{bmatrix}.$$

   (a) Igazoljuk, hogy ezek ortogonális mátrixok!

   (b) Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3$ minden ortogonális transzformációja vagy egy forgatás, vagy egy origóra való tükrözés és egy forgatás szorzata! A fenti mátrixok példát adnak mindkét esetre. Melyik mátrix melyikre példa?

   (c) Adjuk meg mindkét esetben a forgatás tengelyét egy irányvektorával és a forgatás szögét (vagy legalább annak koszinuszát)!

10. Legyen $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^n$ egységvektor, ahol $n > 1$, és legyen $\mathbf{T} = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}$. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}$ a $\mathbf{T}$ fixpontja, azaz $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, akkor $\mathbf{e}\perp\mathbf{x}$.