2. Házi feladat (határidő: 2016-03-04)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
Határozzuk meg $\mathbf{A}$ QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

2. *(a)* Írjuk fel azt a 2×2-es forgatás mátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!

   (b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés mátrixát!

   (c) Írjuk fel azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

3. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

4. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

5. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
Határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer összes optimális megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$! Hány optimális megoldása van?

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 \right).$$

8. *(a)* Mutassuk meg, hogy minden szemiortogonális mátrix kiegészíthető ortogonális mátrixszá! *(b)* Az 1. feladatbeli QR-felbontás $\mathbf{Q}$ mátrixát egészítsük ki ortogonális mátrixszá és ennek segítségével adjuk meg $\mathbf{A}$ teljes QR-felbontását!

9. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? Mindegyik mátrixra állapítsuk meg, hogy melyik oldali inverze létezik és azt számítsuk ki!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Tudjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ortonormált bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ koordinátavektora $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_n)$. Igazoljuk ezt az állítást a $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{v}]_\mathcal{E}$ összefüggésből kiindulva!