3. Házi feladat (határidő: 2016-03-11)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{Q} \in M_n[\mathbb{R}]$ ortogonális mátrix.
   (a) Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{Qx}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y})$!
   (b) Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{Q}$-val való szorzás minden $\mathbb{R}^n$-beli ortonormált bázist ortonormált bázisba visz!
   (c) Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{Q}$-val való szorzás szögtartó $\mathbb{R}^n$-en!
2. Mutassuk példát arra, hogy egy lineáris transzformáció mátrixa lehet egy bázisban ortogonális mátrix és egy másik bázisban nem ortogonális mátrix! Mi a helyzet, ha az új bázis is ortonormált?
3. Legyen $\mathbf{S} \in M_n[\mathbb{R}]$ szimmetrikus, $\mathbf{H} \in M_n[\mathbb{C}]$ önadjungált mátrix.
   (a) Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{Sx}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Sy})$!
   (b) Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $(\mathbf{Hx}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Hy})$!
   (c) Mutassuk meg, hogy az $S : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Sx}$ leképezés egy tetszőleges $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}$ mátrixa nem szükségképpen szimmetrikus mátrix (adjunk egy egyszerű példát), de az $(\mathbf{Sx}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Sy})$ egyenlőség a vektorok e bázisbeli koordinátás alakját használva is igazak maradnak a skaláris szorzás $\mathcal{B}$-beli alakja mellett! (Használjuk az első feladatsor első feladatának eredményét!)
4. Mekkora az alábbi vektorok hossza?
   (a) $(1 - \mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1 + \mathrm{i})$
   (b) $(a + b\mathrm{i}, b + c\mathrm{i}, c + a\mathrm{i})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
5. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!
   (a) $(1 + \mathrm{i}, \mathrm{i}, -1)$, $(1 + \mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1)$
   (b) $(1 - \mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1 + \mathrm{i})$, $(1 + \mathrm{i}, 0, 2, 1 - \mathrm{i})$
6. Mutassuk meg, hogy bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mátrixra $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$.
7. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ normális, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
8. Végezzük el a Gram–Schmidt-eljárást a $\mathbb{C}^3$-beli $(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}, 1, 0)$, $(\mathrm{i}, 0, 0)$ vektorokon!
9. Milyen feltételek mellett unitér a következő mátrix, ha $a, b \in \mathbb{R}$?
$$\begin{bmatrix} a & 0 & b\mathrm{i} & 0 \\ 0 & a & 0 & b\mathrm{i} \\ b\mathrm{i} & 0 & a & 0 \\ 0 & b\mathrm{i} & 0 & a \end{bmatrix}$$
10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ önadjungált!