## 4. Házi feladat (határidő: 2016-03-18)

*A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!*

1. Az alábbiakban jelölje $n$ a mátrix rendjét!

   A. Határozzuk meg az alábbi mátrixok összes sajátértékét és sajátalterét!

   B. A mátrixnak van-e $n$ darab lineárisan független sajátvektora?

   C. Van-e $n$-elemű valós ortonormált, vagy komplex ortonormált sajátvektorrendszere? Ha igen, adjuk meg ezeket!

   D. Adjuk meg minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását!

   *(a)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *(b)* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   *(c)* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(30^0) & -\sin(30^0) \\ \sin(30^0) & \cos(30^0) \end{bmatrix}$

   *(d)* $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. *(a)* Határozzuk meg az $xy$-síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit sajátvektorait, sajátaltereit!

   *(b)* Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit!

3. Melyek igazak egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra?

   *(a)* Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is.

   *(b)* Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is.

   *(c)* Ha 0 sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.

   *(d)* Ha $a^2 = b$ és $b$ sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $a$ vagy $-a$ sajátétéke $\mathbf{A}$-nak is.

4. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyik: önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális. Határozzuk meg sajátértékeiket. Adjunk meg mindhárom esetben sajátvektorokból álló bázist! Írjuk fel mindhárom mátrix sajátfelbontását, azaz $\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását, ahol $\Lambda$ diagonális mátrix.

   *(a)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *(b)* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

   *(c)* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 100-adik hatványát diagonális alakra hozással!

6. Írjuk fel az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

   *(a)* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   *(b)* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Van-e olyan $3 \times 3$-as $\mathbb{Q}$ feletti mátrix, melynek minimálpolinomja:

   *(a)* $x^2 - 2$

   *(b)* $x^2 + x$

8. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n[\mathbb{C}]$, $\lambda$ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ akkor a $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sajátaltér $\mathbf{B}$-re invariáns!

9. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n[\mathbb{C}]$ felcserélhető mátrixok, akkor van közös sajátvektoruk!

10. Az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy az egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$