5. Házi feladat (határidő: 2016-03-25)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Adjunk meg olyan 3×3 as valós mátrixot, melynek $(2,(1,1,0))$, $(0,(1,0,1))$ és $(3,(0,0,-1))$ három sajátpárja.

2. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges c számra, mely nem sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, az $\mathbf{x}$ vektor pontosan akkor sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, ha sajátvektora az $(\mathbf{A} - c\mathbf{I})^{-1}$ mátrixnak.

3. Legyenek $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$, $(\lambda_2, \mathbf{x}_2)$,... $(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátpárjai, és tegyük fel, hogy $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ minden $j > 1$ indexre. Igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i$ vektor esetén létezik a
$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{A}^m \mathbf{v}}{\lambda_1^m}$$
határérték. Határozzuk meg e határértéket!

4. Bizonyítsuk be, hogy a valós $n \times n$-es mátrixok vektortere a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrixok alterének direkt összege!

5. *(a)* Mutassuk meg, hogy hasonló mátrixok minimálpolinomjai megegyeznek!

   (b) Mutassuk meg, hogy bármely invertálható $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixhoz van olyan legföljebb $n-1$-edfokú p polinom, hogy $\mathbf{A}^{-1} = p(\mathbf{A})$.

6. Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő:

   (a) $(x-1)^2(x-2)^3$, $(x-1)(x-2)^2$;

   (b) $x^6 + x + 1$, $x^2 + x + 1$;

   (c) $(x-1)^2(x-2)^2(x-5)$, $(x-1)^2(x-2)^2$;

   (d) $(x^3 - x - 4)^2$, $(x^3 - x - 4)$.

   Ha van, mutassunk rá példát!

7. *(a)* Mutassuk meg, hogy ortogonálisan hasonlóak a következő mátrixok:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!

   (c) Határozzuk meg a mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

   (d) Adjuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat, sajátaltereket mindkét mátrixra!

8. Határozzuk meg az alábbi mátrix Schur-felbontását!
$$\begin{bmatrix} -58 & 25 \\ -144 & 62 \end{bmatrix}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}$ vektorokra fennáll a következő polarizációs formula:
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 + \mathrm{i}\,|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}|^2 - \mathrm{i}\,|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}|^2\right)$$

10. Igazoljuk, hogy az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrix unitéren diagonalizálható! Adjuk meg azt az ortonormált bázist, melyben e mátrix alakja diagonális, és adjuk meg a diagonális mátrixot is!