6. Házi feladat (határidő: 2016-04-01)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Végezzük el az alábbi mátrix spektálfelbontását, sajátaltereire való projekciók segítségével!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és jelölje $\mathbf{A}$ sajátértékeit λ_1, λ_2,..., λ_n. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor normális, ha

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.$$

3. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálható $\mathbf{C}$ fölött. Igazoljuk, hogy ekkor blokkdiagonalizálható a valósok fölött oly módon, hogy minden diagonális blokk vagy 1×1-es (benne $\mathbf{A}$ egy valós sajátértékével), vagy 2×2-es (2 konjugált komplex sajátértékkel).

4. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $\mathbf{x}\cdot\mathbf{Ax} = 0$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. Másrészt mutassuk meg, hogy hasonló állítás nem igaz a valósok körében, azaz mutassunk olyan zérusmátrixtól különböző $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\mathbf{x}\cdot\mathbf{Ax} = 0$ legyen.

5. Tekintsük az $x^2 - y^2 = 0$ másodrendű görbét. Forgassuk el a koordinátarendszert $+60^o$-kal. Adjuk meg a másodrendű görbe egyenletét az új bázisban! Ábrázoljuk a görbét, valamint a két koordinátarendszer tengelyeit!

6. Hozzuk kanonikus alakra az alábbi másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

$$8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$$

7. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, amelyekhez ezek tartoznak!

   (a) $x_1^2 + x_1x_2$

   (b) x_1x_2

   (c) $x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

8. *(a)* Mi a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

   bilineáris függvény mátrixa a standard bázisban és az $\{(1,1),(0,1)\}$ bázisban?

   (b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?

   (c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

9. Egy valós bilineáris függvény mátrixa egy bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Határozzuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

   (b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvadratikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

10. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{i}\bar{u}_1v_2 - \mathrm{i}\bar{u}_2v_1$.

   (a) Írjuk fel a mátrixát!

   (b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?

   (c) Határozzuk meg a jellegét!

   (d) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben g mátrixa diagonális! Írjuk fel itt a kvadratikus alakot!