7. Házi feladat (határidő: 2016-04-08)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mutassuk meg, hogy blokkdiagonális mátrixok

   (a) karakterisztikus polinomja, a blokkok karaktereisztikus polinomjainak szorzata,

   (b) minimálpolinomja a blokkok minimálpolinomjainak legkisebb közös többszöröse!

2. Gram-Schmidt ortogonalizációt végezve $\mathbb{R}^2$-en skaláris szorzatnak a

   $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2$$

   bilineáris függvényt tekintve hozzunk létre φ-re nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben! Mi lesz φ mátrixa ebben a bázisban?

3. *(a)* Melyik az az elemi mátrix, amellyel jobbról szorozva egy $\mathbf{A}$ mátrixot, a mátrix első oszlopának a_{12}/a_{11}-szeresét kivonja a második oszlopból?

   (b) Melyik az az elemi mátrix, amellyel balról szorozva egy $\mathbf{A}$ mátrixot, a mátrix első sorának a_{21}/a_{11}-szeresét kivonja a második sorból?

   (c) Mutassuk meg, hogy szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix esetén a két mátrix egymás transzponáltja!

   (d) Mutassuk meg, hogy az *(a)*- és *(b)*-beli műveleteket egymás után elvégezve egy kvadratikus alak $\mathbf{A}$ mátrixán, a kvadratikus alak jellege nem változik!

   (e) Mutassuk meg, hogy a fenti két műveletet egymás után elvégezve a kvadratikus alak egy új bázisbeli mátrixát kapjuk! Mi ez az új bázis?

   (f) Szemléltessük az eljárást azon a kvadratikus alakon, amelynek mátrixa a standard bázisban

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy a vezető főminorok (sarokaldeterminánsok) pozitivitása helyett a jobb alsó sarokból induló sarokaldeterminánsok pozitivitása is a szimmetrikus mátrix (és a hozzá tartozó kvadratikus alak) pozitív definitségét vonja maga után!

5. Mutassuk meg, hogy minden valós kvadratikus alak az egységvektorok körében felveszi a maximumát, a maximumhely sajátvektor és a maximum értéke sajátérték!

A következő feladatokban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok redukált valamint teljes SVD-felbontását!

7. Határozzuk meg a bal- és jobboldali szinguláris vektorokat a hozzájuk tartozó szinguláris értékkel együtt és a szinguláris felbontások diadikus alakját!

8. Számítsuk ki a mátrixok általánosított inverzét az SVD-felbontás segítségével.

9. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix polárfelbontását!

10. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{M}$ mátrixra

    $$\min_{|\mathbf{x}|=1} |\mathbf{M}\mathbf{x}|$$

    a legkisebb szinguláris érték, és a minimumát az ehhez tartozó jobb szinguláris vektoron veszi fel!