8. Házi feladat (határidő: 2016-04-22)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ egy n dimenziós vektortér. Mutassuk meg, hogy minden $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ valós szimmetrikus bilineáris függvényre van φ-ortogonális bázis V-ben (az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokat φ-ortogonálisnak nevezünk, ha $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$)! Mutassuk meg, hogy ortonormáltra ez nem feltétlenül igaz.

2. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

   (a) $(5, 6, \dots)$;

   (b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4 \dots)$;

   (c) $(10, 9, 8, \dots)$

   (d) $(8, 5, \dots)$

3. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!

4. *(a)* Mutassuk meg, hogy előfordulhat, hogy két mátrix nem hasonló, de karakterisztikus és minimálpolinomjaik megegyeznek!

   (b) Mutassuk meg, hogy 3×3-as mátrixra nincs ilyen ellenpélda!

5. Mutassuk meg, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához!

6. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \dots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = d'_{s+1} = 0$). Mi a kapcsolat a d' és a d'' sorozat elemei és a Jordan-láncok száma között?

7. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

   (a)
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (e)
   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. A 7. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixokra határozzuk meg $\mathbf{A}^{100}$ értékét!

9. A 7. feladatbeli mátrixokra határozzuk meg $e^{\mathbf{J}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja!

10. A 7. feladatbeli mátrixokra határozzuk meg $e^{3\mathbf{A}}$ értékét!