9. Házi feladat (határidő: 2016-04-22)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, egy Jordan-bázisát és a Jordan-láncokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixra az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványainak nullitása rendre 2, 4, 5, 6, 6. Az $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}$ hatványainak nullitása rendre 3, 4, 4. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix komplex és valós Jordan-féle normálalakját, valamint egy-egy komplex és valós Jordan-bázist! Adjuk meg a Jordan-láncokat is!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix komplex és valós Jordan-féle normálalakját, valamint egy-egy komplex és valós Jordan-bázist! Adjuk meg a Jordan-láncokat is!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy, ha egy $\mathbf{A}$ komplex négyzetes mátrix poláris felbontásában $\mathbf{A} = \mathbf{SU} = \mathbf{US}$, azaz az unitér és pozitív szemidefinit rész felcserélhető, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix normális mátrix.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{s}$ az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ_i-hez tartozó pontosan k-indexű általánosított sajátvektora, akkor $k \leq m_i$, ahol m_i az $\mathbf{A}$ minimálpolinomjában az $(x - \lambda_i)$ gyöktényező kitevője!

7. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbf{A}$ mátrix $k > 0$-adik hatványa az egységmátrix, akkor $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz!

8. Keressük meg azt a p Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A})$ a következő mátrixra:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak létezik négyzetgyöke. Milyen szükséges és elégséges feltétel mellett létezik egy szinguláris mátrixnak négyzetgyöke?

10. Adjunk új bizonyítást a Cayley–Hamilton-tételre a mátrixok Jordan-féle normálalakját használva. (Útmutatás: először igazoljuk az állítást Jordan-blokkokra, majd Jordan-normálalakú mátrixra, végül tetszőleges mátrixra.)