10. Házi feladat (határidő: 2016-04-29)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jellemezzük az $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának stabilitását a sajátértékek ismeretében!

2. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

differenciálegyenlet-rendszert az $\mathbf{x}(0) = (1, 1)$ kezdeti feltétel mellett!

3. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Rajzolja le a fenti mátrixok Gersgorin-köreit!

(b) Jelöljük be a sajátétékeket és a mátrixok spektrálsugarát!

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normájukat!

6. Legyen egy transzformáció karakterisztikus polinomja $p(x) = (x+4)^4(x-1)$, minimálpolinomja $m(x) = (x+4)^3(x-1)$. Hány Jordan-blokkból áll a mátrix?

7. Legyen

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Milyen valós x-ekre lesz $F(x)$ pozitív definit mátrix?

8. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ normális mátrix, akkor a spektrális normája egyenlő a spektrálsugárral!

9. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix spektrálsugara kisebb egyenlő mint bármely vektornorma által indukált operátornormája $\mathbf{A}$-nak! Speciálisan legfeljebb akkora, mint $\mathbf{A}$ spektrális normája!

10. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix sajátértékei, akkor $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ felülről becsülhető $\mathbf{A}$ Frobenius-normájának négyzetével és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ normális mátrix.