11. Házi feladat (határidő: 2016-05-06)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges vektortér, és legyen $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$. Igazoljuk, hogy $\operatorname{span}(\mathcal{X})$ metszete mindazon $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altereknek, melyek tartalmazzák $\mathcal{X}$-et, azaz
$$\operatorname{span}(\mathcal{X}) = \bigcap_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}} \mathcal{W}.$$

2. Melyek lineárisan függetlenek az alábbi halmazok közül?

   a) $\{\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x\}$,

   b) $\{\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x\}$,

   c) $\{\sin kx, \cos kx, \sin nx, \cos nx\}$, $k \neq n$, $k, n \in \mathbb{N}^+$

   d) $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$.

3. A legföljebb n-edfokú valós polinomok $\mathcal{P}_n$ vektorterén az alábbi leképezések melyike lineáris leképezés, ahol $D : p \mapsto p'$ a differenciáloperátor:

   (a) $x_m D^m + x_{m-1} D^{m-1} + \cdots + x_1 D + x_0$, $(x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R})$

   (b) $p(x) \mapsto x^n p'(0)$

   (c) $p(x) \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x p(y)\,\mathrm{d}y$

   (d) Írjuk fel az $n = 3$ esetben az $\{1, x, x^2, x^3\}$ bázisra vonatkozó mátrixát a fenti lineáris leképezéseknek.

4. Legyen A és B két felcserélhető lineáris transzformáció a $\mathcal{V}$ véges dimenziós $\mathbb{C}$ feletti vektortéren. Mutassuk meg, hogy van olyan bázis $\mathcal{V}$-ben, amelyben mindkét transzformáció mátrixa felső háromszögmátrix! (használjunk indukciót és faktorteret!)

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ két $\mathbb{F}$ test feletti vektortér, $\dim \mathcal{V}_1 = n$, $\dim \mathcal{V}_2 = m$, akkor a $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ lineáris leképezések vektorteret alkotnak és ez a vektortér izomorf $M_{m,n}[\mathbb{F}]$-fel!

6. Mutassuk meg, hogy két azonos test feletti véges dimenziós vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos dimenziójúak!

7. Legyen $\mathbf{A}$ az n csúcsú irányított $\mathcal{G}$ gráf szomszédsági mátrixa, azaz legyen
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik csúcsból vezet irányított} \\ & \text{él a } j\text{-edik csúcsba,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy $\mathcal{G}$ pontosan akkor erősen összefüggő (azaz pontosan akkor vezet bármelyik pontból bármelyik másikba irányított út), ha nincs olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrix, hogy $\mathbf{PAP}^T$ alakja
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix},$$
ahol $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Z}$ négyzetes mátrixok.

8. Tekintsük az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
mátrix sorterét $\mathcal{V}$-t és ebben az első két sorvektor által kifeszített $\mathcal{W}$ alteret. Határozzuk meg a $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ fatortér dimenzióját. Adjunk meg a faktortérben egy bázist annak segítségével, hogy kiegészítjük $\mathcal{W}$ egy bázisát $\mathcal{V}$ egy bázisává!

9. Mutassuk meg, hogy egy véges dimenziós $\mathcal{V}$ vektortérben minden W altérhez van direkt kiegészítő altér! Mutassuk meg, hogy ez nem egyértelmű, de dimenziója egyértelmű!

10. Legyen $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^3 + xy^5$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ pontban és $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ megváltozásvektornál a $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$, $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$, $\mathrm{d}^3 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$, $\mathrm{d}^4(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ differenciálokat és mutassuk meg, hogy $\mathrm{d}f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ lineáris $\mathbf{h}$-ban, $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ kvadratikus alak. Írjuk fel f $\mathbf{a}$-beli Taylor-polinomjának első négy tagját!