12. Házi feladat (határidő: 2016-05-13)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathcal{V}$ valós számtest feletti, véges dimenziós vektortér. Egy $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus (v. alternáló) bilineáris függvényt *elfjaulónak* nevezünk, ha vannak minden vektorra f-merőleges nem nulla vektorok $\mathcal{V}$-ben, azaz olyan $\mathbf{v} \neq 0$ vektorok, melyekre $f(\mathbf{v}, \mathcal{V}) = 0$. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor elfajuló, ha Gram-mátrixa szinguláris mátrix!

2. Legyen $\mathcal{V}$ valós számtest feletti n dimenziós vektortér, legyen f szimmetrikus vagy alternáló bilineári függvény $\mathcal{V}$-n.

   (a) Mutassuk meg, hogy egy $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ altér elemeire f-merőleges vektorok halmaza altér $\mathcal{V}$-ben. Jelöljük ezt $\mathcal{W}^{\perp}$-el!

   (b) Mutassuk meg, hogy
   $$\dim(\mathcal{W}^{\perp}) \geq \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{W}).$$

   (c) Mutassuk meg, hogy ha f nem elfajuló és megszorítása $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$-n sem elfajúló bilineáris függvény, akkor $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

3. Legyen $\mathcal{V}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortér. Legyen f, g két szimmetrikus bilineáris függvény $\mathcal{V}$-n, legyen f pozitív definit is. Mutassuk meg, hogy van olyan bázis $\mathcal{V}$-ben, melyben f mátrixa egységmátrix és g mátrixa diagonális!(Segítség: Tekintsük $(\mathcal{V}, f)$ euklideszi térben g Gram-mátrixát. Mutassuk meg, hogy van olyan f-re ortonormált bázis $\mathcal{V}$-ben, melyban g mátrixa diagonális!)

4. Legyen $\mathcal{V}$ véges dimenziós valós vektortér. Legyen $\langle ., . \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény, azaz egy skaláris szorzás $\mathcal{V}$-n. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{V}^*$ duális tér minden f eleme alkalmas $\mathbf{v}$ vektorral megegyezik a $\mathbf{v}$-vel való skaláris szorzással, azaz $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$!

5. Legyen $\mathcal{V}$ valós test feletti n dimenziós vektortér, f pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény rajta. Mutassuk meg, hogy $(\mathcal{V}, f)$ euklideszi tér és $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ euklideszi tér között mindig van „skalárszorzattartó” vektortérizomorfizmus! Mutassuk azt is meg, hogy f Gram mátrixa alkalmas bázisban egységmátrix!

6. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{A}$ lineáris transzformáció λ_i sajátétékhez tartozó általánosított sajátaltere annyi dimenziós, mint λ_i multiplicitása $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjában!

7. Legyen $\mathcal{V} = C[-1, 1]$ a $[-1, 1]$ intervallumon folytonos függvények euklideszi tere, ahol a skaláris szorzás
   $$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$
   és legyen $\mathcal{W} = \operatorname{span}(1, x, x^2)$. Gram–Schmidt-ortogonalizációval keressünk e térben ortonormált bázist! (Ezeket nevezik Legendre-polinomoknak.)

8. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ trilineáris függvény, azaz rögzített egyik vátozó mellett, a másik kettőben bilineáris. Tegyük fel továbbá, hogy $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ az első két változóban szimmetrikus bilineáris függvény, a második két változóban alternáló bilineáris függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor f az azonosan nulla leképezés!

9. Legyen a nem 2-karakterisztikájú $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortér 2-dimenziós, és legyen f nem elfajuló alternáló bilineáris függvény rajta. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{V}$-ben van olyan bázis, melyben f Gram-mátrixa
   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Legyen $\mathcal{V}$ vektortér és legyen $\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{W}_i$, altereinek direkt összege. Mutassuk meg, hogy ez a vektortér izomorf azzal a $\mathcal{W}_1 \times \ldots \times \mathcal{W}_n$ vektortérrel, melynek elemei
    $$\{(w_1, \ldots, w_n) \mid w_i \in \mathcal{W}_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

komponensenkénti összeadással és skalárral való szorzással.