# Bevezetés az algebrába 2 – Komplex vektorterek

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2016. február 29.

1. Skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben

# Mi lehet a skaláris szorzás?

- Hogyen terjeszthető ki a skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-re?

$$(1,\mathrm{i})\cdot(1,\mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1-1=0$$
$$(\mathrm{i},\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i},\mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1-1=-2$$

- Az 1-dimenziós térben mi az abszolút érték?

  A $z=a+\mathrm{i}b$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem $z^2$!

  Eszerint $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ és a $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}+\dots+z_n\overline{w_n},\ \text{vagy}$$
$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}=\overline{z_1}w_1+\overline{z_2}w_2+\dots+\overline{z_n}w_n.$$

# Komplex mátrix adjungáltja

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix adjungáltján (vagy Hermite-féle transzponáltján) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^\mathsf{H}$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{H} = \overline{\mathbf{A}}^\mathsf{T}$.

m semmi köze a „klasszikus adjungálthoz”!

P $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{H} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$, $[1-\mathrm{i} \quad \mathrm{i}]^\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

T Az adjungált tulajdonságai Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, $c$ komplex szám. Ekkor

1. $(\mathbf{A}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\mathsf{H} = \mathbf{A}^\mathsf{H} + \mathbf{B}^\mathsf{H}$,
3. $(c\mathbf{A})^\mathsf{H} = \overline{c}\mathbf{A}^\mathsf{H}$
4. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\mathsf{H} = \mathbf{B}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}$.

m A valós transzponálás kiterjesztése.

# Skaláris szorzás definíciója

**D** Komplex vektorok skaláris szorzata A $\mathbb{C}^n$-beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \dots + \overline{z_n} w_n$$

komplex skalárt értjük. Mátrixszorzatos alakja $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^{\mathsf{H}} \mathbf{w}$.

**P** $(1, \mathrm{i})$ és $(\mathrm{i}, \mathrm{i})$ szorzatai:

$$(1,\mathrm{i})\cdot(1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = 1 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = -\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(1,\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i},$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i})\cdot(1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix}\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix} = -\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 - \mathrm{i}.$$

# Skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m Kiterjesztése a valós skaláris szorzatnak!

m A harmadik tulajdonságban felsoroltak bármelyike következik a másikból az első alapján.

m Komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata valós!

# Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben

**D** Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor hossza, vagy abszolút értéke $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, két vektor távolsága megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Két vektort merőlegesnek tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.

**T** Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

# Unitér mátrixok

- m Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.
- D Unitér mátrix Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.
- m Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:
  1. $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,
  2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
  3. $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
  4. $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
  5. $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
  6. $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

# Komplex mátrix kitüntetett alterei

- m Komplex mátrixok szorzatában NEM sorvektor és oszlopvektor skaláris szorzata szerepel!
- m $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$
- T Komplex mátrix kitüntetett alterei Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, akkor
  1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$,
  2. $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$,
- K Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ négyzetes mátrixra ekvivalensek a következők:
  1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
  2. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$,
  3. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
- m Az invertálható mátrixok mind ilyenek, hisz a nulltér csak a nullvektorból áll.

# Merőleges vetítés és tükrözés egy hipersíkra

- Az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete: $\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ rá merőleges összetevője: $\mathbf{x}-\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})=(\mathbf{I}-\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}})\mathbf{x}$
- Merőleges tükrözés mátrixa $\mathbf{I}-2\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{H}}$

# GS-ortogonalizáció komplex terekben

P Ortogonalizáljuk az $(\mathrm{i},0,0)$, $(\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i})$, $(\mathrm{i},\mathrm{i},0)$ vektorokból álló vektorrendszert.

M $\mathbf{v}_1=(\mathrm{i},0,0)$, a továbbiakban használjuk a $\mathbf{v}_{i+1}=\mathbf{a}_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}\frac{\mathbf{v}_k(\mathbf{v}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{v}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{v}_k}$ képletet:

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\0\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}}-\frac{\begin{bmatrix}0\\\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\\mathrm{i}/2\\-\mathrm{i}/2\end{bmatrix}$$

# Az ONB

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

# Önadjungált mátrixok

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrixot önadjungált vagy Hermite-féle mátrixnak nevezzük, ha

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}.$$

m önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak

m Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált,

a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak, ha minden elemük valós.

P Melyek önadjungáltak?

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

# Ferdén önadjungált mátrixok

D $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ferdén önadjungált, ha

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$$

P $\begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \\ -3-\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ ferdén önadjungált.

Á ferdén önadjungált mátrixok főátlójában tiszta imaginárius számok állnak (a 0 is annak tekintendő).

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén önadjungált, akkor $\mathrm{i}\mathbf{A}$ és $-\mathrm{i}\mathbf{A}$ önadjungált.

Á Minden komplex négyzetes mátrix egyértelműen előáll egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

B $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{H}})$, $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ és $\mathbf{B}$ önadjungált, $\mathbf{C}$ ferdén önadjungált.

# Normális mátrixok

D Az adjungáltjával fölcserélhető mátrixokat normális mátrixoknak nevezzük:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$$

Á Minden valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix normális. Minden komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér mátrix normális.

m Van olyan mátrix, mely nem esik a fönt fölsorolt osztályokba, de normális:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Kapcsolatok

Á {valós szimmetrikus} ⊂ {önadjungált} ⊂ {normális} ⊂ {nulltér ⊥ oszloptér}

B A ⊆ relációk közül csak az utolsó nem trivi: Tudjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$, ami ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Azt, hogy mindegyik tartalmazás valódi, példákkal igazoljuk:

$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ önadjungált, de nem szimmetrikus

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ferdén szimmetrikus) nem önadjungált, de normális

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nem normális, de invertálható, így a nulltér merőleges az oszloptérre.