Bevezetés az algebrába 2 – Sajátérték, diagonalizálás

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2016. április 29.

Jó bázis választása

P Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!

M A sík egy bázisa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, a rá merőleges altér egy bázisa $\{\mathbf{c}\}$.

A T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$.

Sajátérték, sajátvektor

D L! $\mathbb{F}$ test. Amh a $\lambda \in \mathbb{F}$ szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük. ($\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ bal sajátvektor, ha $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$)

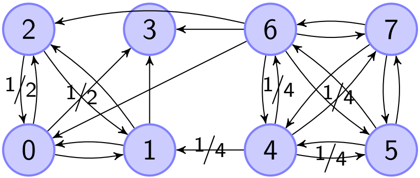
P -1 egy sajátérték:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A 25 000 000 000$-os sajátvektor



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Módosítás, hogy ne ragadjunk be egy dokumentumba:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha megy i-ből j-be él és i ki-foka k,} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha i ki-foka 0 és n a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Módosítás, hogy ne ragadjunk be dokumentumok egy csoportjába (ld. $\{0, 1, 2, 3\}$):

$$\mathbf{M} = (1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$

ahol $\mathbf{J}$ a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, és $d \in (0, 1)$.
Empírikus $d \in (0.1, 0.2)$ a jó választás, pl. $d = 0.15$, így $1 - d = 0.85$. Ekkor kerekített jegyekkel

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{bmatrix}$$

- Ha $\mathbf{x}$ a bolyongás kiindulópontjának valószínűségeloszlását megadó vektor, akkor az első lépés után a gráf i pontjában $[\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{M}]_i$ valószínűséggel leszünk, az m-edik lépés után $[\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{M}^m]_i$ valószínűséggel.
$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{M}^m = \mathbf{v}^\mathsf{T}.$$
- (A pozitív mátrixok elmélete, Markov-láncok) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{v}^\mathsf{T}$ az ún. stacionárius eloszlás, melyre $\mathbf{v}^\mathsf{T} = \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{M}$.
- $\mathbf{v} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100)$.
- Tehát a dokumentumok sorrendje: 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7 (két holtversennyel).

Sajátaltér

m Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor minden $c\mathbf{x}$ $(c \neq 0)$ is:

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$.

Á A sajátvektorok alterei Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{x}$ megoldása $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\iff$ $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

D A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

Sajátaltér meghatározása

P Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz és a 10-hez, mint sajátértékhez tartozó sajátalterét.

M a 2 sajátérték $\iff$ $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

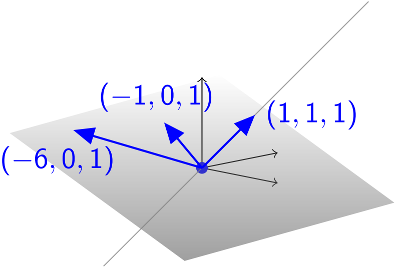
A sajátaltér egy bázisa $\{(-6, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Sajátaltér meghatározása (folyt)

A 10 is sajátérték:

$$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. A sajátalteret az $(1, 1, 1)$ vektor feszíti ki.



Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

m $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletnek van a zérusvektortól különböző megoldása

$\iff$ a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása

$\iff$ $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ polinomot az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomnak nev.

A $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

m Néhol a kar. pol. $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

Karakterisztikus polinom felírása

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

M Minden 2×2-es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Háromszögmátrixok sajátértékei

T A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

B $\mathbf{A}$ háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ is $\rightsquigarrow$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei.

Determináns, nyom és a sajátértékek

T Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$
$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója a karakterisztikus polinomban.

B A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

2×2-es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

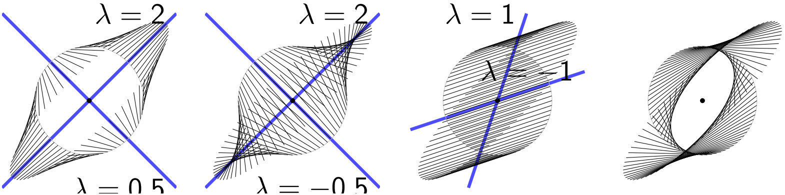
$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}.$$

Egységkörábrák:



A 2×2-es szimmetrikus mátrixok sajátalterei

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós,
2. $\mathbf{A}$ két sajátértéke azonos $\iff$ $\mathbf{A} = a\mathbf{I}$ (ekkor a sík összes vektora sajátvektor),
3. ha $\mathbf{A}$-nak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

B $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$, ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$.

1. karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$ diszkriminánsa $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$
2. A két sajátérték megegyezik $\iff$ $D = 0$ $\iff$ $a = d$ és $b = 0$.
3. $\lambda \neq \mu$ és $(\lambda, \mathbf{u})$, $(\mu, \mathbf{v})$ a két sajátpár.

$$\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$\rightsquigarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1. $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2. $\forall\ \lambda$: $\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

M

1. felső háromszögmátrix: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=2$
2. $\lambda=0$:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\end{aligned} \rightsquigarrow t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér $\operatorname{span}((1,0,0))$ és $\operatorname{span}((1/2,1,0),(1/2,0,1))$.

Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

M $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$

racionálisgyök-tétellel: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 6$:

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

P Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

M A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2-\lambda+1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x - iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x + iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D Algebrai multiplicitás: a λ sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

D Geometriai multiplicitás: a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója.

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

M $(4-\lambda)^3$, a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

P $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, gyökei 1 és 2

- $\lambda = 1$:

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás = 2

- $\lambda = 2$:

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- geometriai multiplicitás = 1, algebrai multiplicitás = 2

Mátrix hatványainak sajátértékei

T $\mathbf{A}$ invertálható $\iff$ a 0 nem sajátértéke.

B $\mathbf{A}$ invertálható $\iff$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak.

T Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ sajátpárja, $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(\lambda^n, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}^n$ sajátpárja, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \rightsquigarrow$ minden vektor sv. ✓

$n > 0$: (teljes indukcióval) $n = 1$ ✓

$n = k - 1 \;\Rightarrow\; n = k$:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$$

$\mathbf{A}$ invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

$n < 0$: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x} \rightsquigarrow \lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}$.

Mátrix hatványainak hatása

T Ha $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ az $\mathbf{A}$ sajátpárjai, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{x}_i$, akkor $\mathbf{A}^m \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i \lambda^m \mathbf{x}_i$.

B trivi

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k) \\
&= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\
&= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.
\end{aligned}$$

K Találunk-e mindig sajátvektorokból álló bázist?

Speciális valós mátrixok sajátértékei

T $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ egy tetszőleges sajátértéke

1. $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ valós,
2. $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ imaginárius,
3. $\mathbf{A}$ ortogonális $\Rightarrow |\lambda| = 1$,
4. $\mathbf{A}$ nilpotens $\iff \lambda = 0$, azaz karakterisztikus polinomja x^n.

B 1, 2 $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$.

Vegyük mindkét oldal adjungáltját: $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$.

L! $\lambda = a + ib$. $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \rightsquigarrow \lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib \rightsquigarrow \Im(\lambda) = 0$.

$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A} \rightsquigarrow a + ib = -a + ib$, azaz $\Re(\lambda) = 0$.

3 $\mathbf{A}$ ortogonális $\rightsquigarrow |\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| \rightsquigarrow |\lambda| = 1$

4 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, λ sajátérték $\rightsquigarrow \lambda^k$ sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak $\rightsquigarrow$ $\lambda = 0$.

megfordítás a Cayley–Hamilton-tételből következik (minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját): ha $x^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{A}$ nilpotens.

Speciális komplex mátrixok sajátértékei

T

1. önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
2. ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
3. unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

Lineáris transzformációk sajátértékei

D Amh a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

P Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?

1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;
2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;
3. a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Hasonló mátrixok sajátértékei

T Sajátérékhez kapcsolódó invariánsok Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{B}}$, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}$

$\rightsquigarrow \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$

$\rightsquigarrow$ megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})) \rightsquigarrow$ a geometriai multiplicitások is megegyeznek.

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések

$$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$$
$$=-\lambda^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda+\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések $\rightsquigarrow$ a sajátértékek elemi szimmetrikus polinomjai invariánsak $\rightsquigarrow$ szimmetrikus polinomjai invariánsak!
Elemi szimmetrikus polinomok:

$$e_1(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i=\operatorname{trace}(\mathbf{A}),$$
$$e_2(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j,$$
$$e_3(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\sum_{1\le i<j<k\le n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k,$$
$$\vdots$$
$$e_n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=\det(\mathbf{A}).$$

Mátrixok diagonalizálhatósága

D Amh az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{1}$$

D A $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$$

alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontásának nevezünk.

Mátrixok diagonalizálhatósága

T Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora.

Ekkor $\mathbf{\Lambda}$ az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.

B $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}$ invertálható

L! $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{x}_n]$, $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{x}_n]. \tag{2}$$

$\iff \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$

de $\mathbf{C}$ invertálható, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

P Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek függetlenek

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} \sim \mathbf{\Lambda}$, ahol

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bal sajátvektorok

D Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenlet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ feltételnek megfelelő sorvektorait az $\mathbf{A}$ mátrix bal sajátvektorainak nevezzük.

m ezek a transzponált sajátvektorai: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$.

m $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ karakterisztikus polinomja azonos $\rightsquigarrow$ bal és jobb sajátértékek közt nincs különbség

m $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \rightsquigarrow$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai, ugyanis

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

tehát $\lambda_i\mathbf{y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{y}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

A sajátfelbontás diadikus alakja

m

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^\mathsf{T} \qquad (3)\end{aligned}$$

D Ezt nevezzük a sajátfelbontás diadikus alakjának.

A sajátfelbontás diadikus alakja

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bal sajátvektorai, sajátfelbontása, diadikus alakja?

M Bal sajátvektor: „a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai", vagy „a $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai". A sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Különböző sajátértékek sajátalterei

T Ha λ_1, $\lambda_2, \dots$ λ_k különböző sajátértékei az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B Indirekt: tfh e vektorok lineárisan összefüggők. Legyen $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$, de az $\mathbf{x}_j$ vektorok $j < i$ esetén lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$
$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$$

Kivonva az $\mathbf{x}_i$ λ_i-szereséből:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

Az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lin. függetlenek és $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ különbözőek, ezért $c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0 \rightsquigarrow \mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0}$, Ellentmondás: $\mathbf{x}_i$ sajátvektor, tehát $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$.

K Ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz.

K Különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszert ad.

K Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

B n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik $\rightsquigarrow$ diagonalizálható.

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata

T Egy mátrix valamely sajátértékének geometriai multiplicitása nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásánál.

B $\mathbf{A}$ mátrix, μ geometriai multiplicitása $g = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}))$.

a sajátaltér egy bázisa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_g\}$, kiegészítjük a $\mathbf{x}_{g+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ vektorokkal az egész tér bázisává.

L! $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_g | \mathbf{x}_{g+1} \ \dots \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$, $\mathbf{C}^{-1}$-et első g sora után bontsuk blokkokra:

$$\mathbf{C}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Z} \\ \hline \mathbf{W} \end{array}\right].$$

$\mathbf{X}$ oszlopai a μ-höz tartozó sajátvektorok: $\mathbf{AX} = \mu\mathbf{X}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_g & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZX} & \mathbf{ZY} \\ \mathbf{WX} & \mathbf{WY} \end{bmatrix}.$$

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata (folyt)

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{WX} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZY} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZX} = \mathbf{I}_g$, $\mathbf{WY} = \mathbf{I}_{n-g}$.

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZAX} & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{WAX} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{ZAX} = \mathbf{Z}\mu\mathbf{X} = \mu\mathbf{ZX} = \mu\mathbf{I}_g$, és $\mathbf{WAX} = \mu\mathbf{WX} = \mathbf{O}$

a karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} \mu\mathbf{I}_g - \lambda\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g} \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)^g \det(\mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g})$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ és ezzel együtt $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjának μ legalább g-szeres algebrai multiplicitású gyöke.

Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás

T Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B ($\Rightarrow$) Ha a mátrix diagonalizálható, akkor a sajátvektoraiból álló bázis elemszáma épp a geometriai multiplicitások összege, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.

($\Leftarrow$) Ha a geometriai multiplicitások összege n, akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk.

T Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ minden sajátértéke $\mathbb{F}$-beli (pl. mert $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test), akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

D $\mathbf{A}$ spektruma: az $\mathbf{A}$ sajátértékeinek halmaza (néhol családja), jele $\sigma(\mathbf{A})$.

m bontsuk fel a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^T + \lambda_2\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^T + \dots + \lambda_k\mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k^T \\ &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

T Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

1. $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
2. $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
3. $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

1. $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.
2. $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow$ $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^\mathsf{T} = \mathbf{O}$.
3. $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{P}_i \rightsquigarrow \mathbf{P}_i$ vetítés!

- Mivel bármely két $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X})$

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T} \mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i \mathbf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{P}_i).$$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$, hiszen $\mathcal{O}(\mathbf{X}_i)$ a λ_i-hez tartozó sajátaltér.

- Megmutatjuk, $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathbf{P}_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{P}_j - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}_j \right) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_i) \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$.
$\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

Spektrálfelbontás

P Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálfelbontását.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M A sajátértékekből és a jobb és bal sajátvektorokból:

$$\mathbf{A} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ahol

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ellenőrizhetjük: $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$, vetítő mátrixok, mert $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2$, és a sajátalterekre vetítenek.

Alterek direkt összege

D L! $\mathcal{V}$ véges dimenziós vt., $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$. Amh a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek direkt összege – jelölésben $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$ –, ha $\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegére.

T Legyenek $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ az n-dimenziós $\mathcal{V}$ vektortér alterei. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$,
2. $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek egy-egy bázisának egyesítése a $\mathcal{V}$ bázisát adja,
3. Mindegyik altér metszete a többi összegével csak a nullvektorból áll, és az alterek összege az egész tér, azaz
   1. $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, és
   2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_k$.

m 3-ban nem elég kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$ esetén!
L! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$
$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$
$(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0})$.

Sajátalterek direkt összege

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{F}^n$ előáll az $\mathbf{A}$ sajátaltereinek direkt összegeként.

B Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor létezik sajátvektoraiból álló bázis, mely a sajátalterek bázisainak egyesítése, tehát 2 szerint $\mathbf{A}$ előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

Ha $\mathbb{F}^n$ előáll $\mathbf{A}$ sajátaltereinek direkt összegeként, akkor a sajátalterek dimenzióinak összege n, azaz a geometriai multiplicitások összege n, így az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható.

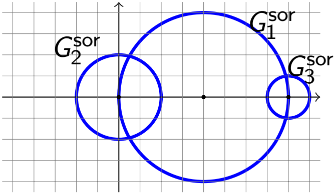
T Az $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{F}^n$ felbomlik L sajátaltereinek direkt összegére.

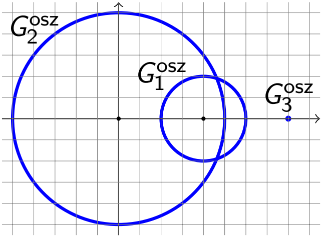
Gersgorin-körök

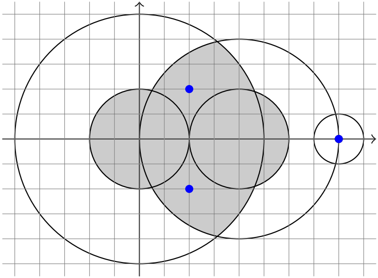
D Gersgorin-körök: Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \ldots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{4}$$

P Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:







T $\mathbf{A}$ valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$,
- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. $\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| |x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is. (Hisz Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót)

Hatványmódszer

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne). Legyen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

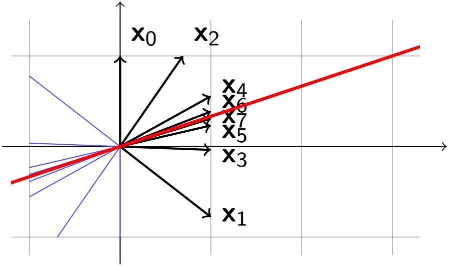
$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

Tehát ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



Á Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathbb{C}$ fölöttinek tekintjük, és λ sajátérték, akkor $\bar{\lambda}$ is.

Á $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátértékei azonosak, azonos algebrai multiplicitással.

Á Ha $\mathbf{A}$ minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke.

Á Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ egy sajátpárja és p egy polinom, akkor $(p(\lambda), \mathbf{x})$ sajátpárja a $p(\mathbf{A})$ mátrixnak.

Á Ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ és legalább egyikük invertálható, akkor $\mathbf{AB} \sim \mathbf{BA}$ (tehát sajátértékei azonosak).

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times m}$ és $m \geqslant n$, akkor $\chi_{\mathbf{AB}}(x) = x^{m-n}\chi_{\mathbf{BA}}(x)$.

B

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_{m\times n} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{A} \\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

Á Ha $\mathbf{A}$ invertálható és diagonalizálható, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ is diagonalizálható.

Á Ha $\mathbf{A}$ a zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix, akkor nem diagonalizálható.

Á Ha $\mathbf{P}$ vetítő mátrix (idempotens, azaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$), akkor $\mathbf{P}$ diagonalizálható, és minden sajátértéke 0 vagy 1.

Á Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sajátértékek folytonos függvényei a mátrix elemeinek.

B A karakterisztikus polinomot definiáló determinánst a kígyók összegére bontva látható, hogy $\chi_{\mathbf{A}}$ minden együtthatója $\mathbf{A}$ elemeiből képzett szorzatok összege, tehát azok folytonos függvénye.
Egy komplex polinom gyökei az együtthatók folytonos függvényei.

P Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x}$ az $\mathbf{A}$ egy sajátvektora, $\mathbf{y}^{\mathsf{H}}$ a $\mathbf{B}$ egy bal sajátvektora.

(a) Igazoljuk, hogy az

$$L : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{m\times n}; \mathbf{X} \mapsto \mathbf{AXB}$$

lineáris leképezés, melynek $\mathbf{xy}^{\mathsf{H}}$ egy sajátvektora!

(b) $\operatorname{trace}(L) = \operatorname{trace}(\mathbf{A})\operatorname{trace}(\mathbf{B})$