Bevezetés az algebrába 2 – Diagonalizálás ortonormált bázisban

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI MATEMATIKA ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI INTÉZET EGYETEM

2016. március 21.

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$. (ekvivalens alak: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$)

T Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, ahol $\lambda \neq \mu$ két különböző sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. Így $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Ebből

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

Eszerint $(\lambda - \mu)(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = 0$, de $\lambda - \mu \neq 0$, ezért $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, azaz a két vektor merőleges egymásra.

Valós spektráltétel

T A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B ($\Rightarrow$) Ha ortogonálisan diagonalizálható, akkor szimmetrikus, ha ugyanis $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T}$, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q\Lambda Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}.$$

- ($\Leftarrow$) $\mathbf{A}$ rendjére vonatkozó teljes indukcióval: $n = 1$ esetén $\mathbf{A}$ szimmetrikus és diagonális.
- ($n - 1 \Rightarrow n$) $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ minden sajátértéke valós, legyen $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ sajátpár, ahol $|\mathbf{u}_1| = 1$.
- Egészítsük ki $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-sá, ekkor $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ mátrix ortogonális. Mivel $\mathbf{u}_1^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = \lambda$, és $i > 1$ esetén $\mathbf{u}_i^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_i^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = 0$, ezért

- $$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

- $\mathbf{B}$ szimmetrikus, ugyanis
$$\mathbf{B}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^\mathsf{T} = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B},$$
tehát $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!

- $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke $\rightsquigarrow$
- indukciós feltevés $\rightsquigarrow \exists$ ortogonális $\mathbf{Q}_1$ és diagonális $\mathbf{\Lambda}_1$, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$.
- $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ortogonális, és

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix is ortogonálisan diagonalizálható.

Ortogonális diagonalizálás megvalósítása

- Határozzuk meg $\mathbf{A}$ egy λ sajátértékét,

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \text{és az} \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}.$$

- Ismételjük meg e lépést $\mathbf{A}_1$-gyel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

- Végül

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \dots$$

P Diagonalizáljuk az alábbi mátrixot ortogonálisan!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

M

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20,$$

- gyökei 2, 2 és 5 $\rightsquigarrow \mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(2, 2, 5)$
- $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(x, y, z) = (-1, 1, 0)s + (-1, 0, 1)t$

- $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(x, y, z) = (1, 1, 1)t$

- Ortogonalizáció $\mathcal{N}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$-ben: $\mathbf{a}=(-1,1,0)/\sqrt{2}$:

$$(-1,0,1)-\left((-1,0,1)\cdot\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\right)\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right).$$

- Normálva: $\mathbf{b}=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$
- Az ortogonális mátrix, a standard bázisra való áttérés mátrixa:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

- Inverze a transzponáltja, $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$.

Schur-felbontás

T 1 Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$.
2 Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$.

m a főátló elemei a sajátértékek lesznek, ezért valós esetben kikötöttük hogy azok is valósak legyenek.

B Elég 1-et, teljes indukció.

- $n = 1$ trivi. Legyen $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ sajátpár, $\mathbf{u}_1$ egységvektor.
- Kiegészítés ONB-sá: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, a $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ ortogonális mátrixszal

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

- $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik azonosak $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke.
- teljes indukció $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{T}_1$ felső háromszög mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$.
- Ekkor a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ ortogonális mátrixszal:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Ez utóbbi mátrix pedig felsőháromszög-mátrix.

P Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

M Karakterisztikus polinom: $(x-1)^2$

- sajátérték: $\lambda_{1,2} = 1$, sajátaltér: $\operatorname{span}((4,3))$.
- ONB: $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
- Innen $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

P Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra a következő mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$

- $\lambda_{1,2} = 7$, $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$; $\lambda_3 = 14$, $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$
- $\mathbf{x}_1$-et kiegészítjük ONB-sá:

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 7 & 0 & -21 \\ \hline 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

- A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0,1)$, rá merőleges a $(1,0)$. Így

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{Q}_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Innen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ és ebből}$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Valós mátrix komplex sajátértéke

Á $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(\lambda, \mathbf{x})$ egy sajátpár, ahol $\lambda = a + \mathrm{i}b$, $b \neq 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

1. $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{x}})$ szintén sajátpár,
2. $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek,
3. $\mathbf{A}$ hasonló egy

$$\begin{bmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

alakú mátrixhoz.

Valós Schur-felbontás 1.

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\exists$ $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, és egy olyan

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{\Lambda}_k \end{bmatrix}, \tag{2}$$

alakú felső blokkháromszögmátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda}_j$ $(j = 1, \dots, k)$ alakja vagy

- $[\lambda]$, ahol λ az $\mathbf{A}$ valós sajátértéke, vagy
- $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$, ahol $a \pm b\mathrm{i}$ az $\mathbf{A}$ két nem valós sajátértéke.

B Teljes indukcióval: ha λ valós sajátérték, akkor $\mathbf{A} \sim \left[\begin{smallmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$

ha $\lambda = a \pm \mathrm{i}b$ komplex sajátérték, akkor $\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$

Valós Schur-felbontás 2.

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\exists$ $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális és egy $\mathbf{T}$ felső blokkháromszögmátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$, és $\mathbf{T}$ minden diagonális eleme vagy az $\mathbf{A}$ egy valós sajátértékét tartalmazó 1×1-es mátrix, vagy egy olyan 2×2-es mátrix, melynek két nem valós sajátértéke egymás komplex konjugáltja.

B $\mathbf{C} = \mathbf{QR}$ QR-felbontása.

- $\rightsquigarrow \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQR} = \mathbf{T}$, azaz $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQ} = \mathbf{RTR}^{-1}$.
- Blokkosítsuk $\mathbf{R}$-et a $\mathbf{T}$ főátlójának blokkméretei szerint:

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQ} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{\Lambda}_k \end{bmatrix}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{R}_1^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{R}_2\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{R}_2^{-1} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_k\mathbf{\Lambda}_k\mathbf{R}_k^{-1} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{\Lambda}_j \sim \mathbf{R}_j\mathbf{\Lambda}_j\mathbf{R}_j^{-1}$

Unitér diagonalizálhatóság

D Az $\mathbf{A}$ mátrix unitéren diagonalizálható, ha találunk egy $\mathbf{U}$ unitér és egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

m A valós szimmetrikus mátrixokra adott bizonyítás nem megy önadjungált mátrixokra, mert $\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}} \neq \mathbf{\Lambda}$.

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

B $(\Rightarrow)$ $\forall z \in \mathbb{C}:\ \bar{z}z = z\bar{z} \rightsquigarrow$ minden komplex diagonális mátrix normális, így $\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}$. $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}.\end{aligned}$$

Unitér diagonalizálhatóság

($\Leftarrow$) Schur-felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$ ($\mathbf{U}$ unitér, $\mathbf{T}$ felsőháromszög-mátrix). $\mathbf{A}$ normális $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U}\\ &= \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})^{\mathsf{H}} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}.\end{aligned}$$

- A $\mathbf{T}$ mátrix alakja

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$, $[\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, $\rightsquigarrow$ $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$,
hasonlóan $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{22}$ és $[\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}]_{22}$-ből $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb.
$\rightsquigarrow$ $\mathbf{T}$ diagonális.

Következmények

Á Minden ferdén szimmetrikus, önadjungált, ferdén önadjungált, unitér mátrix unitéren diagonalizálható!

Á Egy unitéren diagonalizálható mátrix pontosan akkor

1. önadjungált, ha diagonális alakjában minden elem valós.
2. ferdén önadjungált, ha diagonális alakjában minden imaginárius.
3. unitér, ha diagonális alakjában minden elem abszolút értéke 1.

B $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow \mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$. A ($\Rightarrow$) irányt már tudjuk, a ($\Leftarrow$) bizonyítása:

1. $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}(-\mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = -\mathbf{A}$
3. mivel $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, így $z^{-1} = \bar{z}$, ezért $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$.

K Két önadjungált (két ferdén önadjungált/két unitér) mátrix pontosan akkor hasonló, ha sajátértékeik azonosak.

B Ha $\mathbf{P}$ permutációmátrix ($p_{\pi(i)i} = 1$), ahol π permutáció, akkor $\mathbf{P}^{\mathsf{T}} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\mathbf{P} = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \dots, \lambda_{\pi(n)})$.

Valós normális mátrixok blokkdiagonalizálhatósága

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\mathbf{A}$ pontosan akkor normális, ha van olyan $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, hogy

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{\Lambda}_k \end{bmatrix}, \tag{3}$$

ahol $\mathbf{\Lambda}_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ vagy 1×1-es, vagy 2×2-es valós mátrix, utóbbi esetben az alakja

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}.$$

L Mutassuk meg, hogy ha **A** blokkdiagonális, az átlóban négyzetes mátrixokkal, akkor **A** pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális.

B $\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)^\mathsf{T} = \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)^\mathsf{T} \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) \iff \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^\mathsf{T}, \ldots, \mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^\mathsf{T}) = \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k^\mathsf{T}\mathbf{A}_k)$.

L Tegyük fel, hogy az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ mátrix normális, és két sajátértéke nem valós. Ekkor $c = -b \neq 0$ és $d = a$.

B $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}$ pontosan akkor igaz, ha $b^2 = c^2$ és $ab + cd = ac + bd$. $c = b$ nem lehet, mert akkor a mátrix szimmetrikus lenne, és annak valósak a sajátértékei, így $c = -b \neq 0$. Innen $ab - bd = -ab + bd$, azaz $a = d$.

B ($\Leftarrow$) Ha egy mátrix (3) alakú, akkor normális (ellenőrizzük), így normális a hozzá ortogonálisan hasonló $\mathbf{A}$ is.

($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ valós normális. Mivel valós, ezért ortogonálisan hasonló egy blokk felsőháromszög-mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai 1×1-es vagy 2×2-es méretűek.

Mivel normális, a két szorzat összevetéséből adódik, hogy a diagonális blokkok fölötti elemek mindegyike 0, tehát a mátrix blokkdiagonális.

Blokkdiagonális mátrix pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális. Egy 1×1-es valós mátrix egyetlen eleme a sajátértéke. Egy 2×2-es normális mátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, ahol $b \neq 0$.

Ortogonálisan blokkdiagonalizálható mátrixok

K **A** pontosan akkor szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. A diagonális elemek **A** sajátértékei. Két szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.

K **A** pontosan akkor ferdén szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai $[0]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{smallmatrix}\right]$ alakúak, ahol utóbbi mátrix a $\pm \mathrm{i} b_j$ sajátértékekhez tartozik. Két ferdén szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.

K **A** pontosan akkor ortogonális, ha ortogonálisan hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai $[1]$, $[-1]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{smallmatrix}\right]$ alakúak. Sajátértékei ± 1, $\cos\varphi_j \pm \mathrm{i}\sin\varphi_j$. Két ortogonális mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan, ha sajátértékei azonosak.

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja

D Homogén másodfokú polinom: minden tag másodfokú.

P Írjuk mátrixszorzat alakba a $2x^2 + 4xy - y^2$ polinomot!

M $2x^2 + 4xy - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

D (Valós) kvadratikus alak (kvadratikus forma):

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvény, ahol **A** szimmetrikus mátrix.

m $\mathbb{R}$ helyett bármely nem 2-karakterisztikájú (azaz nem 2-hatvány elemű) test felett értelmezhető, de komplexekre érdekesebb lesz a komplex kvadratikus alak:

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

ahol **A** önadjungált.

Főtengelytétel

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $\mathbf{Q}$ ortogonális: $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ diagonális. Ekkor az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ kvadratikus alakba transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{4}$$

ahol λ_1, λ_2,. . . , λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

m $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. A $\mathcal{Q}$ mindig választható jobbsodrásúnak, azaz hogy $\det \mathbf{Q} = 1$ legyen.

Ez elérhető, ha $\det \mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1-szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikus alakot nem befolyásolja, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.

- A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus alakon főtengely-transzformációnak nevezzük.

Főtengelytranszformáció

P $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$

M A mátrixszorzatalak $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

- karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, sajátértékek 6, -3, 2, a sajátvektorok rendre $(2,-2,1)$, $(-5,-4,2)$, $(0,1,2)$.
- A kvadratikus alak

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2.$$

- $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ezért egyik vektort -1-gyel szorozzuk $\rightsquigarrow$ jobbsodrású ortonormált bázis: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Homogén másodrendű görbe ábrázolása

P Ábrázoljuk a $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ egyenletű görbét!

M A kvadratikus alak mátrixa

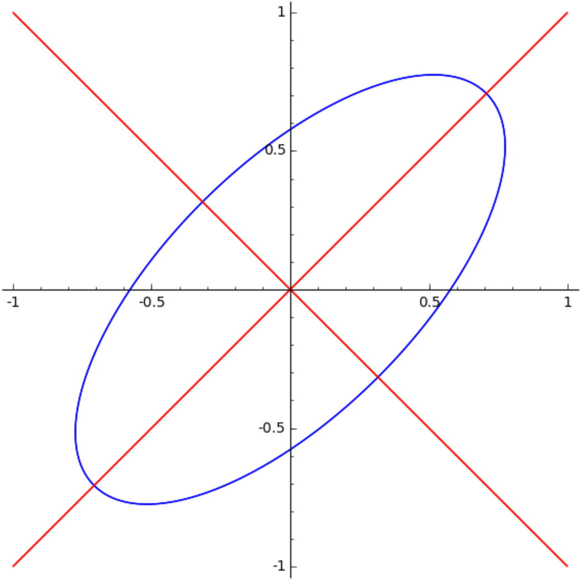
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, sajátpárok: $(5, (-1, 1))$, $(1, (1, 1))$
- **Q**-t 1-determinánsúnak választva

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés után $5y_1^2 + y_2^2 = 1$, azaz

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + y_2^2 = 1$$


1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

Másodrendű görbe centrális helyzetbe hozása

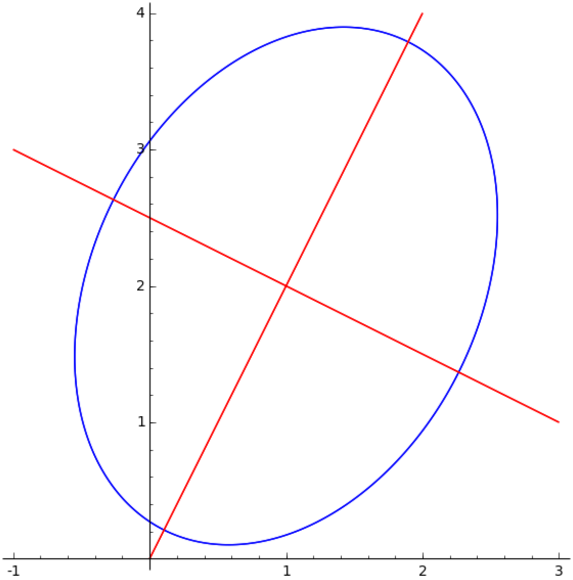
P Ábrázoljuk a $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + 5 = 0)$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-10 \;\; -20]$, $C = 5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \; \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \; \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\rightsquigarrow 10y_1^2 + 5y_2^2 - 10\sqrt{5}y_2 + 5 = 0 \rightsquigarrow 10y_1^2 + 5(y_2^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 5) = 20$$

- $(z_1, z_2) = (y_1, y_2 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2z_1^2 + z_2^2 = 4$, azaz $\frac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$
- A féltengelyek hossza $\sqrt{2}$ és 2, a középpont $(y_1, y_2) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$,
- a tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$,
  egyenletük $y = 2x$, $x + 2y = 5$.


4
3
2
1
-1
1
2
3

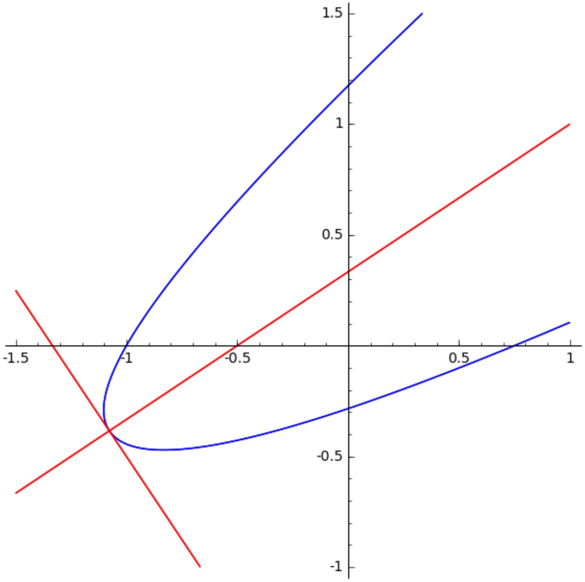
P Ábrázoljuk a $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 8x_2 = 3$ egyenletű görbét!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [1 \ \ -8]$, $C = -3$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\rightsquigarrow 13y_1^2 + 2\sqrt{13}y_1 - \sqrt{13}y_2 - 3 = 0 \rightsquigarrow (\sqrt{13}y_1 + 1)^2 = \sqrt{13}y_2 + 4$$

- $(z_1, z_2) = (\sqrt{13}y_1 + 1, \sqrt{13}y_2 + 4)$ jelöléssel: $z_1^2 = z_2$.
- A parabola csúcspontja $(y_1, y_2) = (-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13}) = (-14/13, -5/13)$,
- a tengelyek egyenlete $y + \frac{5}{13} = -\frac{3}{2}(x + \frac{14}{13})$, $y + \frac{5}{13} = \frac{2}{3}(x + \frac{14}{13})$.


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0.5
1

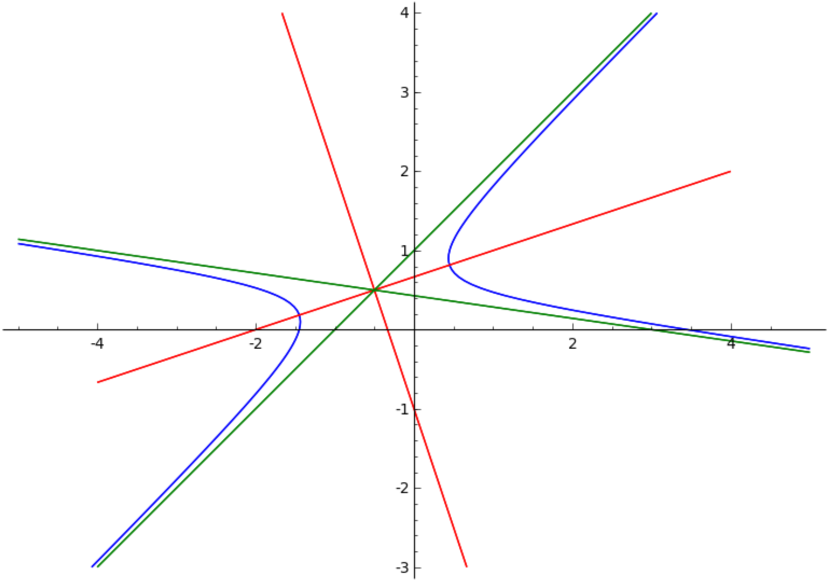
P Ábrázoljuk a $x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 2x_1 + 10x_2 - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit, aszimptotáit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-2\ 10]$, $C = -5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$2y_1^2 - 8y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{32}{\sqrt{10}}y_2 - 5 = 0 \rightsquigarrow$
$2(y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 - 8(y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 2$

- $(z_1, z_2) = (y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}, y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})$: $z_1^2 - 4z_2^2 = 1$, azaz $z_1^2 - \frac{z_2^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$
- A féltengelyek hossza 1 és $\frac{1}{2}$, a középpont $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
- a tengelyek iránytangense 2 és $-\frac{1}{2}$, egyenletük $(y - \frac{1}{2}) = -3(x + \frac{1}{2})$, $(y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})$,
- az aszimptoták iránytangensei leolvashatók az eredeti egyenletből: $y = x + 1$ $(y - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2})$ és $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}(x + \frac{1}{2})$.


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
2
4

Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége

D Amh az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén.

Amh f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak az.

Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

- $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - 2y^2$, $h(x,y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2$

  f pozitív definit, hisz az $(x,y) \neq (0,0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)
- Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.
- Ha $\mathbf{A} = [a]$, azaz $\mathbf{A}$ 1×1-es, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.
- Az identikus mátrix pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, ami pozitív, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú.

Definitség meghatározása a sajátértékekből

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha $\mathbf{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

M Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1, 1 és 4:

$$\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi&\eta&\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}=\xi^2+\eta^2+4\zeta^2$$

$\rightsquigarrow$ pozitív definit.

- $\mathbf{B}$ sajátértékei -1, -1 és 2, a főtengely-transzformáció után kapott alak $-\xi^2-\eta^2+2\zeta^2 \rightsquigarrow$ indefinit (pl. $(1,0,0)$ helyen negatív, a $(0,0,1)$ helyen pozitív).
- $\mathbf{C}$ sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2-3\eta^2+0\zeta^2=-3\xi^2-3\eta^2 \rightsquigarrow$ negatív szemidefinit ($(0,0,1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel).

Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

T A szimmetrikus $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

B $(\Leftarrow)$ (az előbb beláttuk)

- $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$
- $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ minden sajátértéke nemnegatív $\rightsquigarrow$ $\mathbf{\Lambda}$ főátlóbeli elemeiből négyzetgyököt lehet vonni
- $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, $\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ jelölésekkel $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

P Van-e olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

M $\mathbf{A}$ szimmetrikus, sajátértékei 9, 9, 0, tehát ilyen $\mathbf{C}$ mátrix létezik.

- $\mathbf{A}$ sajátfelbontása és a $\mathbf{C}$ mátrix:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pozitív definit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit,
2. van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$,
3. van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$.

A 3 pont szerinti $\mathbf{R}$ egyértelmű!

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

B $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.
$\mathbf{C}$ invertálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ is $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$-nak 0 nem sajátértéke $\rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív definit.

- $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{2}$ $\mathbf{R}$ főátlóbeli elemei pozitívak $\rightsquigarrow \mathbf{R}$ invertálható, így $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ megfelel.
- $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$ $\mathbf{A}$ pozitít definit $\rightsquigarrow$ invertálható $\rightsquigarrow$ LU-felbontása egyértelmű: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$,
  $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^T\mathbf{LU}\mathbf{e}_i = u_{ii} > 0$,

$$\mathbf{U} = \mathbf{DV} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

  $\mathbf{A} = \mathbf{LDV}$, ahol $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{V}$ felső egységháromszög-mátrix
  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{LD}^T\mathbf{DV} = \mathbf{V}^T\mathbf{D}^T\mathbf{DL}^T$ egyértelmű! $\rightsquigarrow \mathbf{L} = \mathbf{V}^T \rightsquigarrow$
  $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^T$ jelöléssel $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$.
- E felbontás egyértelmű.

P Adjuk meg az **A** mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B **A** mátrix pozitív definit ($\chi_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$) Az LU-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\operatorname{diag}(1,4,1) = \operatorname{diag}(1,2,1)\operatorname{diag}(1,2,1)$ és az $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,1)\mathbf{L}^T \rightsquigarrow$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$