Bevezetés az algebrába 2 – Kvadratikus alakok, bilineáris függvények

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2016. június 10.

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja

D Homogén másodfokú polinom: minden tag másodfokú.

P Írjuk mátrixszorzat alakba a $2x^2 + 4xy - y^2$ polinomot!

M $2x^2 + 4xy - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

D (Valós) kvadratikus alak (kvadratikus forma):

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvény, ahol **A** szimmetrikus mátrix.

m $\mathbb{R}$ helyett bármely nem 2-karakterisztikájú (azaz nem 2-hatvány elemű) test felett értelmezhető a kvadratikus alak így, de komplexekre érdekesebb lesz a

D komplex kvadratikus alak: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$

m Igazolni fogjuk, hogy komplex kvadratikus alaknál különböző mátrixok különböző alakot adnak, és egy ilyen alak pontosan akkor valós értékű, ha **A** önadjungált.

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Főtengelytétel

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $\mathbf{Q}$ ortogonális: $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ diagonális. Ekkor az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ kvadratikus alakba transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{1}$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

m $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. A $\mathcal{Q}$ mindig választható jobbsodrásúnak, azaz hogy $\det \mathbf{Q} = 1$ legyen.

Ez elérhető, ha $\det \mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1-szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikus alakot nem befolyásolja, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.

- A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus alakon főtengely-transzformációnak nevezzük.

Főtengelytranszformáció

P $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$

M A mátrixszorzatalak $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

- karakterisztikus polinom: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, sajátértékek 6, -3, 2, a sajátvektorok rendre $(2, -2, 1)$, $(-5, -4, 2)$, $(0, 1, 2)$.
- A kvadratikus alak

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2.$$

- $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ezért egyik vektort -1-gyel szorozzuk $\rightsquigarrow$ jobbsodrású ortonormált bázis: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Homogén másodrendű görbe ábrázolása

P Ábrázoljuk a $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ egyenletű görbét!

M A kvadratikus alak mátrixa

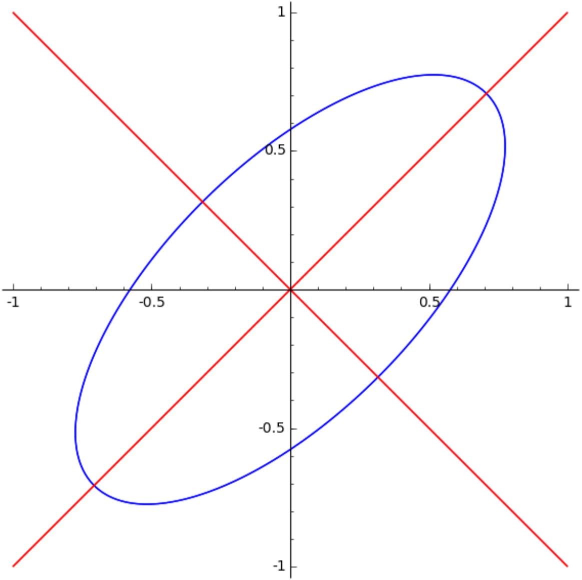
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, sajátpárok: $(5, (-1, 1))$, $(1, (1, 1))$
- $\mathbf{Q}$-t 1-determinánsúnak választva

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés után $5y_1^2 + y_2^2 = 1$, azaz

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + y_2^2 = 1$$


1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

Másodrendű görbe centrális helyzetbe hozása

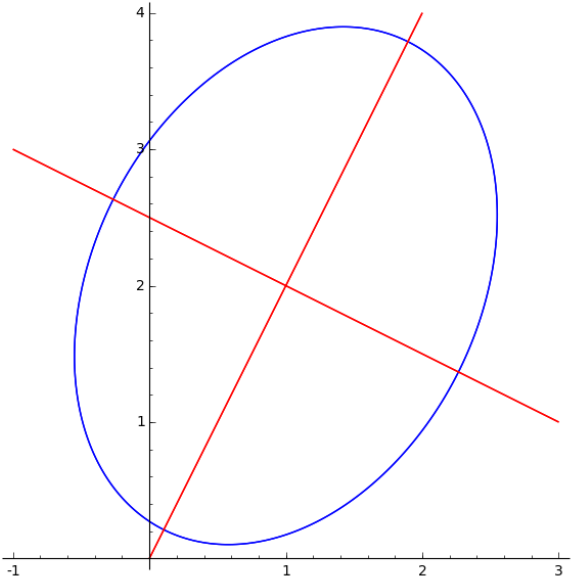
P Ábrázoljuk a $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + 5 = 0)$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-10 \ \ -20]$, $C = 5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow 10y_1^2 + 5y_2^2 - 10\sqrt{5}y_2 + 5 = 0 \rightsquigarrow 10y_1^2 + 5(y_2^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 5) = 20$

- $(z_1, z_2) = (y_1, y_2 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2z_1^2 + z_2^2 = 4$, azaz $\frac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$
- A féltengelyek hossza $\sqrt{2}$ és 2, a középpont $(y_1, y_2) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$,
- a tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$, egyenletük $y = 2x$, $x + 2y = 5$.


4
3
2
1
-1
1
2
3

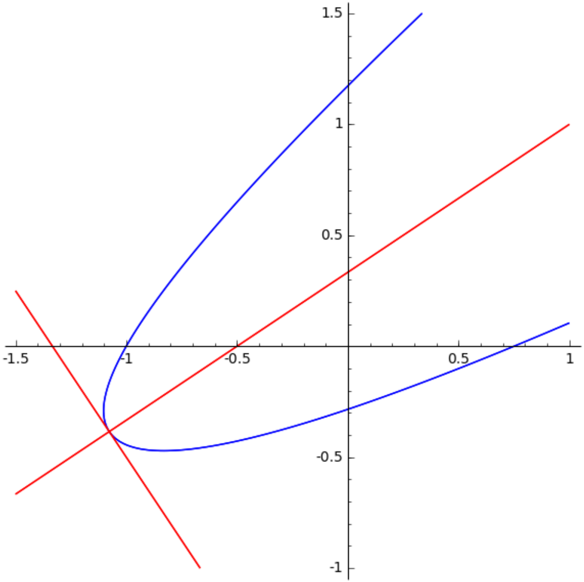
P Ábrázoljuk a $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 8x_2 = 3$ egyenletű görbét!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [1 \ \ -8]$, $C = -3$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow 13y_1^2 + 2\sqrt{13}y_1 - \sqrt{13}y_2 - 3 = 0 \rightsquigarrow (\sqrt{13}y_1 + 1)^2 = \sqrt{13}y_2 + 4$

- $(z_1, z_2) = (\sqrt{13}y_1 + 1, \sqrt{13}y_2 + 4)$ jelöléssel: $z_1^2 = z_2$.
- A parabola csúcspontja $(y_1, y_2) = (-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13})$, azaz $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13}) = (-14/13, -5/13)$,
- a tengelyek egyenlete $y + \frac{5}{13} = -\frac{3}{2}(x + \frac{14}{13})$, $y + \frac{5}{13} = \frac{2}{3}(x + \frac{14}{13})$.


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0.5
1

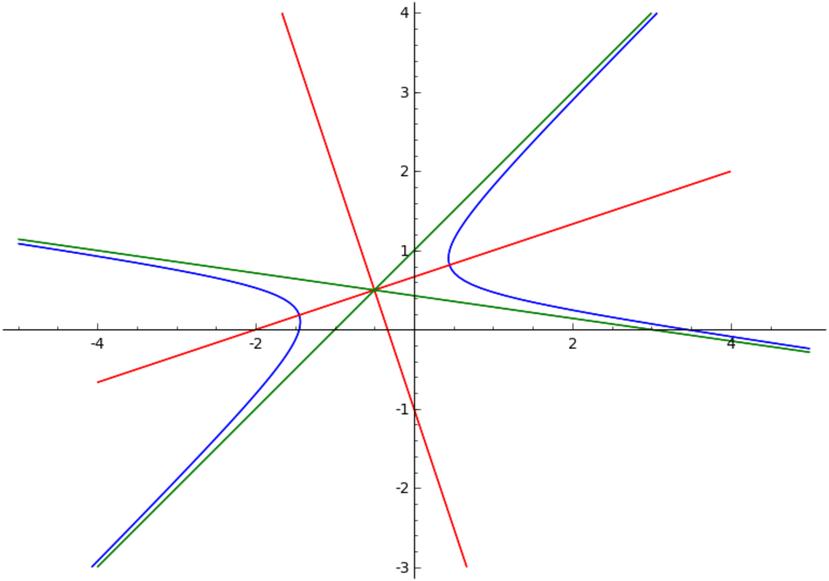
P Ábrázoljuk a $x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 2x_1 + 10x_2 - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit, aszimptotáit!

M Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y} + C$, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, $\mathbf{B} = [-2\ 10]$, $C = -5$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix},\ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix},\ \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$2y_1^2 - 8y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{32}{\sqrt{10}}y_2 - 5 = 0 \rightsquigarrow$
$2(y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 - 8(y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 2$

- $(z_1, z_2) = (y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}, y_2 - \frac{2}{\sqrt{10}})$: $z_1^2 - 4z_2^2 = 1$, azaz $z_1^2 - \frac{z_2^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$
- A féltengelyek hossza 1 és $\frac{1}{2}$, a középpont $(x_1, x_2) = \mathbf{Q}(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
- a tengelyek iránytangense $\frac{1}{3}$ és -3, egyenletük $(y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})$, $(y - \frac{1}{2}) = -3(x + \frac{1}{2})$,
- az aszimptoták iránytangensei leolvashatók az eredeti egyenletből: $y = x + 1$ $(y - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2})$ és $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}(x + \frac{1}{2})$.



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
2
4

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége

D Amh az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén.

Amh f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak az.

Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

- $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - 2y^2$, $h(x,y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2$
  f pozitív definit, hisz az $(x,y) \neq (0,0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)
- Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.
- Ha $\mathbf{A} = [a]$, azaz $\mathbf{A}$ 1×1-es, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.
- Az identikus mátrix pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, ami pozitív, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú.

Definitség meghatározása a sajátértékekből

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha $\mathbf{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

M Az **A** mátrix sajátértékei 1, 1 és 4:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

$\rightsquigarrow$ pozitív definit.

- **B** sajátértékei -1, -1 és 2, a főtengely-transzformáció után kapott alak $-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2 \rightsquigarrow$ indefinit (pl. $(1, 0, 0)$ helyen negatív, a $(0, 0, 1)$ helyen pozitív).
- **C** sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\xi^2 - 3\eta^2 \rightsquigarrow$ negatív szemidefinit ($(0, 0, 1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel).

Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

T A szimmetrikus $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

B ($\Leftarrow$) (az előbb beláttuk)

- ($\Rightarrow$) $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$
- $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ minden sajátértéke nemnegatív $\rightsquigarrow$ $\mathbf{\Lambda}$ főátlóbeli elemeiből négyzetgyököt lehet vonni
- $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, $\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ jelölésekkel $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

P Van-e olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

M $\mathbf{A}$ szimmetrikus, sajátértékei 9, 9, 0, tehát ilyen $\mathbf{C}$ mátrix létezik.

- $\mathbf{A}$ sajátfelbontása és a $\mathbf{C}$ mátrix:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pozitív definit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit,
2. az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontásban $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív,
3. van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$.
4. van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$,

A 3 pont szerinti $\mathbf{R}$ egyértelmű!

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

B $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ $\mathbf{A}$ pozitít definit $\rightsquigarrow$ invertálható $\rightsquigarrow$ LU-felbontása egyértelmű:
$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \rightsquigarrow \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{LU}\mathbf{e}_i = u_{ii} > 0$,

- $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{LD}\hat{\mathbf{U}}$, ahol $\mathbf{L}$ alsó, $\hat{\mathbf{U}}$ felső egységháromszög-mátrix
$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}^\mathsf{T}(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^\mathsf{T}$ egyértelmű! $\rightsquigarrow$
$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{U}}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^\mathsf{T}$ jelöléssel $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$.

- E felbontás egyértelmű.
- $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$ $\mathbf{R}$ főátlóbeli elemei pozitívak $\rightsquigarrow$ $\mathbf{R}$ invertálható, így $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ megfelel.
- $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.
  $\mathbf{C}$ invertálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ is $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$-nak 0 nem sajátértéke $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$ pozitív definit.

P Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit ($\chi_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$) Az LU-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\operatorname{diag}(1,4,1) = \operatorname{diag}(1,2,1)\operatorname{diag}(1,2,1)$ és az $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,1)\mathbf{L}^T \rightsquigarrow$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Főminorok

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük.

Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról. A vezető főminor másik elnevezése sarokaldetermináns.

m Ha egy mátrix diagonális alakú és pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív, akkor minden főminora is pozitív, ha pozitív szemidefinit, akkor minden főminora nemnegatív. Ha e diagonális mátrix minden sajátértéke negatív, akkor vezető főminorai felváltva $-+-+-+\dots$ előjelűek.

Főminorok a karakterisztikus polinomban

T L! **A** karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda)$, sajátértékei λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, és jelölje $e_k = e_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a sajátértékek k-adik elemi szimmetrikus polinomját. Ekkor

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} e_k \lambda^{n-k}$$

ahol e_k megegyezik az **A** összes k-adik főminorának összegével.

B egyrészt $\chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) \rightsquigarrow$

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(-\lambda)^{n-k}$$

- másrészt $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, e determinánst a belőle kiválasztható kígyók determinánsainak összegére bontjuk, majd e determinánsokat tovább bontjuk az $a_{ii} - \lambda$ alakú összegek felbontásával. Pl.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- A főátlójában $-\lambda$-kat tartalmazó determinánsokat két főminor szorzatára bontjuk, az egyik $(-\lambda)^{n-k}$, a másik a $-\lambda$-kat tartalmazó sorok és oszlopok elhagyásával keletkezett főminor. Pl.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{42} & 0 \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{24} \\ a_{42} & 0 \end{vmatrix}$$

  (a $-\lambda$-kat tartalmazó sorok és oszlopok bal felső sarokba hozása mindig azonos számú sor- és oszlopcserével valósítható meg, így előjele nem változik)

- Tehát $(-\lambda)^{n-k}$ együtthatója $=$ az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható összes k-adrendű főminorok összege

Definitség és (vezető) főminorok

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

1. pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;
2. pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
3. negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.
4. pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;

B 1 **A** pozitív definit $\rightsquigarrow$ LU-felbontásában $u_{ii} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$

J! **A**, **L**, **U** mátrix első k sorának és első k oszlopának kereszteződésében álló részmátrixot $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{L}_k$, illetve $\mathbf{U}_k$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{O} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow \mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$

$\rightsquigarrow$ a k-adik vezető főminor $|\mathbf{A}_k| = |\mathbf{L}_k||\mathbf{U}_k| = u_{11}u_{22}\dots u_{kk} > 0$.

- $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ $\rightsquigarrow u_{kk} = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k-1}) > 0 \rightsquigarrow$ **A** pozitív definit.

- 2 L! **P** egy olyan permutáló mátrix, melyre $\mathbf{PAP}^\mathsf{T}$ az **A** egy adott főminorát vezető főminorba viszi

  A-nak pontosan akkor pozitív minden főminora, ha minden vezető főminora az.

- 3 Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit, így az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontásban minden i-re $u_{ii} < 0$, ami igazolja az állítást.
- 4 Ha az $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, az $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ sor- és oszlopindexekhez tartozó $\mathbf{B}$ részmátrix is pozitív szemidefinit, hisz bármely $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}$ szorzatban $\hat{\mathbf{x}}$ kiegészíthető nullákkal úgy, hogy $[\hat{\mathbf{x}}]_j = [\mathbf{x}]_{i_j}$ legyen, így $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$.
- Tfh $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív. Megmutatjuk, hogy ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ pozitív definit, mert sarokaldeterminánsai pozitívak.

  Így $\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} > 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, amiből

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0.$$

- L! $\mathbf{A}_k$ a bal felső $k \times k$-as részmátrix, sajátértékeit jelölje $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
  $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}_k + \varepsilon \mathbf{I}_k$ sajátértékei $\lambda_1 + \varepsilon, \ldots, \lambda_k + \varepsilon$
  $\rightsquigarrow$ $\varepsilon > 0$ esetén $\det(\mathbf{A}_k + \varepsilon \mathbf{I}_k) = (\lambda_1 + \varepsilon) \ldots (\lambda_k + \varepsilon) = \varepsilon^n + e_1 \varepsilon^{n-1} + \ldots + e_{n-1}\varepsilon + e_n > 0$
  (ahol e_j az $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ j-edik elemi szimmetrikus függvénye)
- ugyanis $e_j =$ az $\mathbf{A}_k$ j-edrendű főminorainak összegével, amelyek viszont mind nemnegatívak, mivel $\mathbf{A}$-nak is főminorai, másrészt $\varepsilon^n > 0$
- Tehát $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{I}$ minden vezető főminora pozitív, így $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{I}$ pozitív definit.

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Bilineáris függvények

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ függvényt bilineáris függvénynek nevezzük, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

1. $b(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
3. $b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = cb(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

m b lineáris az első változóban, a második rögzítése mellett és lineáris a második változóban, az első rögzítése mellett.

P

1. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$,
2. skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,
3. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Komplex bilineáris (szeszkvilineáris) függvények

D Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{C}$ fölötti vektortér. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ függvényt komplex bilineáris függvénynek vagy szeszkvilineáris függvénynek nevezzük, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{C}$ esetén

1. $b(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
3. $b(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{c}b(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
4. $b(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = cb(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

m b „konjugált lineáris" az első változóban, a második rögzítése mellett és lineáris a második változóban, az első rögzítése mellett.

P
1. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
2. skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$-ben: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$,

Bilineáris függvény mátrixa

D Legyen a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ (komplex) bilineáris függvény $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó mátrixán, vagy Gram-mátrixán a

$$\mathbf{B} = [b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)]_{ij}$$

mátrixot értjük.

T Legyen $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ egy bázisa, egy $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakját jelölje $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}$. A $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ bilineáris függvényhez annak $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó Gram-mátrixát rendelő $b \to \mathbf{B}$ leképezés bijekció a bilineáris függvények és az $\mathbb{F}^{n \times n}$ között, ahol

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}.$$

m A tétel hasonlóan szól komplex bilineáris függvényekre is annyi különbséggel, hogy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ és

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{H}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}.$$

B Legyen $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{c}_i$, $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{c}_j \rightsquigarrow$
$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\sum_i x_i \mathbf{c}_i, \sum_j y_j \mathbf{c}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b_{ij} =$
$\sum_i x_i \left(\sum_j b_{ij} y_j\right) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$

- Fordítva: legyen $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ egy tetszőleges mátrix, és legyen $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_{\mathcal{C}}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{C}}$

  E függvény bilineáris (ellenőrizzük!),

  másrészt e b függvény mátrixa épp $\mathbf{B}$, ugyanis

$$b_{ij} = b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}]_{ij}.$$

Bilineáris függvény mátrixa báziscsere után

Á Legyen $\mathbf{M}$ a $\mathcal{B}$-ről $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixa, azaz $\mathbf{x}_\mathcal{C} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x}_\mathcal{B}$, $\mathbf{y}_\mathcal{C} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{y}_\mathcal{B}$. Ekkor

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}_\mathcal{C} = \mathbf{x}_\mathcal{B}^\mathsf{T}\mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{y}_\mathcal{B}$$

D Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, jelölése $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, ha van olyan invertálható $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{M}$.

A fenti $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{M}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{M}$ transzformációt kongruenciatranszformációnak nevezzük.

m Míg a lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, addig bilineáris függvény mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex bilineáris függvény esetén $\mathbf{A} = \mathbf{M}^\mathsf{H}\mathbf{B}\mathbf{M}$.

Speciális bilineáris függvények

D $\mathcal{V}$ $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{F}$

1. szimmetrikus, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
2. ferdén szimmetrikus vagy szimplektikus, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. alternáló, ha bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

$\mathcal{V}$ komplex vektortér, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$

4. Hermite-féle (önadjungált, ermitikus), ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{b(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$.

Á Minden alternáló bilineáris függvény szimplektikus, ugyanis $0 = b(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, amiből $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Á Nem 2-karakterisztikájú testekben a megfordítás is igaz: ha b szimplektikus, akkor alternáló. ✓

m 2-karakterisztika esetén a szimplektikus forma azonos a szimmetrikussal, mivel $-1 = 1$.

P 1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ szimmetrikus bilineáris függvény,
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ Hermite-féle bilineáris függvény,
3. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ esetén $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alternáló bilineáris függvény.

T 1. Egy bilineáris $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha mátrixa szimmetrikus (bármely bázisban),
2. pontosan akkor alternáló, ha mátrixa ferdén szimmetrikus,
3. egy komplex bilineáris $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor Hermite-féle (ermitikus), ha mátrixa önadjungált.

B $(\Rightarrow)$ b szimmetrikus $\rightsquigarrow b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = b(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) \rightsquigarrow b_{ij} = b_{ji} \rightsquigarrow \mathbf{B}$ szimmetrikus

■ $(\Leftarrow)$ $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\sum_i x_i \mathbf{c}_i, \sum_j y_j \mathbf{c}_j) = \sum_{ij} x_i y_j b(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \sum_{ij} x_i y_j b(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

m A többi állítás bizonyítása hasonló.

Szimmetrikus bilineáris alak diagonalizálhatósága

T Egy b bilineáris függvény pontosan akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus!

B Ha b diagonalizálható, azaz valamely bázisban diagonális a mátrixa, akkor szimmetrikus, hisz diagonális mátrix szimmetrikus!

- Ha b szimmetrikus, akkor a $\mathbf{B}$ Gram-mátrixa is az

$\leadsto$ $\exists$ $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ diagonális.

$\leadsto$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}_\mathcal{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{y}_\mathcal{Q} = \sum_i \lambda_i x_i y_i$, ahol a λ_i értékek $\mathbf{B}$ sajátértékei.

Á Ha a b bilineáris függvény diagonalizálható, akkor diagonalizálható úgy is, hogy mátrixának főátlójában csak ± 1-esek és 0-k állnak!

B Legyen $\mathbf{\Lambda}$ a b egy mátrixának diagonalizálásából származó diagonális mátrixa. Legyen

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ A $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mátrixszal $\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D}$ diagonális és minden diagonális eleme ± 1 vagy 0, másrészt kongruens $\mathbf{\Lambda}$-val.

$\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D}$-ben az i-edik főátlóbeli elem $\operatorname{sgn}(\lambda_i)$

P $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2$. Hozzuk diagonális alakra!

M A standard bázisban $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{y}$

E mátrix sajátértékei 2, 2, 5 (korábban meghatároztuk a sajátvektorokból álló $\mathbf{Q}$ mátrixot is)

$\mathbf{Q}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ áttérés mátrixa, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ koordinátás alakja a $\mathcal{Q}$ bázisban $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$, $\mathbf{y}_\mathcal{Q} = (\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\tilde{y}_3)$ (tehát $\mathbf{x}_\mathcal{Q} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathcal{E}$).

$\rightsquigarrow$ $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_2\tilde{y}_2 + 5\tilde{x}_3\tilde{y}_3$

$\rightsquigarrow$ de van olyan bázis is, melyben $b(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \tilde{x}_3\tilde{y}_3$

Sylvester-féle tehetetlenségi tétel

D A b szimmetrikus bilineáris függvény valamely $\mathbf{D}$ diagonális mátrixában jelölje n_+ a pozitív előjelű, n_- a negatív előjelű és n_0 a zérus értékű diagonális elemek számát. A b szimmetrikus bilineáris függvény tehetetlenségén (inerciáján) vagy szignatúráján az (n_+, n_-, n_0) hármast értjük. Hasonlóan definiálható szimmetrikus mátrix tehetlensége.

K Értelmes-e ez a definíció?

T (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel) Két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

m Ez tehát azt jelenti, hogy mindegy, hogy b mátrixát melyik bázisban diagonalizáltuk, mindegyik mátrixhoz ugyanaz a (n_+, n_-, n_0) hármas tartozik, ez tehát a szimmetrikus bilineáris függvényt jellemzi!

B ($\Leftarrow$) A kongruencia tranzitív, így ha két mátrixnak azonos a tehetetlensége (azonos ± 1-0 diagonális mátrixszal kongruensek), akkor egymással is.

- ($\Rightarrow$) Indirekt: TFH $\exists$ két kongruens mátrix, melyeknek különböző a tehetetlenségük ($n_+ + n_- + n_0 = m_+ + m_- + m_0 = n$).

$\rightsquigarrow$ $\exists$ két különböző ± 1-0 diagonális mátrix, melyek kongruensek, azaz ugyanannak a b bilineáris fv.-nek a mátrixai a $\mathcal{B}$, illetve $\mathcal{C}$ bázisban:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_+} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I}_{n_-} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}_{n_0} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_+} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I}_{m_-} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O}_{m_0} \end{bmatrix}_{\mathcal{C}},$$

$\rightsquigarrow$ $\forall \mathbf{x} \in \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n_+})$ vektorra $b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$
$\forall \mathbf{y} \in \operatorname{span}(\mathbf{c}_{m_+ +1}, \dots, \mathbf{c}_n)$ vektorra $b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0$

- Két kongruens mátrix rangja és nullitása is megegyezik, így $n_0 = m_0$.
- TFH $n_+ > m_+ \rightsquigarrow m_- + m_0 > n_- + n_0 \rightsquigarrow n_+ + m_- + m_0 > n$

$\rightsquigarrow$ $\exists \mathbf{z} \in (\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n_+}) \cap \operatorname{span}(\mathbf{c}_{m_+ +1}, \dots, \mathbf{c}_n))$, melyre $b(\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0$ és $b(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \leqslant 0$, ellentmondás.

1 Valós kvadratikus alakok
- Főtengelytranszformáció
- Kvadratikus alakok definitsége
- Definitség és főminorok

2 Bilineáris függvények

3 Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata

Polarizációs formulák

m Ha $b(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (komplex) bilineáris, akkor $q(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},\mathbf{x})$ kvadratikus alak.

L Ha b komplex bilin. fv. és q a hozzá tartozó kvadratikus alak, akkor fennáll a köv. polarizációs formula:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathrm{i}q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) + \mathrm{i}q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})\right)$$
$$b(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \mathrm{i}q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) - \mathrm{i}q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})\right)$$

B Egyszerű kifejtés és behelyettesítés:

$$q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},\mathbf{u})$$
$$q(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) - b(\mathbf{u},\mathbf{v}) - b(\mathbf{v},\mathbf{u})$$
$$q(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + \mathrm{i}b(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mathrm{i}b(\mathbf{v},\mathbf{u})$$
$$q(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) - \mathrm{i}b(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathrm{i}b(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

T 1 A fenti $b \mapsto q$ leképezés komplex bilineáris függvényekre bijektív.

2 Egy komplex bilineáris fv. pontosan akkor Hermite-féle, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak valós értékű.

3 Valós bilineáris függvényekre $b \mapsto q$ a szimmetrikus bilineáris fv-ek és a kvadratikus alakok közt bijektív.

B 1 Az előző lemma szerint egy komplex bilineáris függvény kifejezhető a hozzá tartozó kvadratikus alak segítségével, tehát ha két kvadratikus alak megegyezik, akkor a hozzájuk tartozó bilineáris függvények is!

2 Az előző lemma eredményeit összevetve: ha q valós értékű, akkor $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{b(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$, azaz b Hermite-féle.

Ha b Hermite-féle, akkor $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \overline{b(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, azaz $q(\mathbf{u}) = \overline{q(\mathbf{u})}$, tehát q valós értékű!

3 Valós esetben különböző bilineáris függvényekhez is tartozhat azonos kvadratikus alak:

- Az $\left[\begin{smallmatrix}1&3\\1&3\end{smallmatrix}\right]$ és az $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&3\end{smallmatrix}\right]$ mátrixokhoz azonos kvadratikus alak tartozik: $q(x) = x^2 + 4xy + 3y^2$.
- Ha b alternáló, akkor $b(\mathbf{u},\mathbf{u}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{u})$, azaz $q(\mathbf{u}) = -q(\mathbf{u})$, azaz $q(\mathbf{u}) = 0$, tehát minden alternáló bilineáris függvényhez a zérus kvadratikus alak tartozik.

A valós polarizációs formula a szimmetrikus b bilineáris függvényre a $b(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + 2b(\mathbf{u},\mathbf{v})$ képletből:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\right).$$

tehát ha két szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak megegyezik, akkor a hozzájuk tartozó bilineáris függvények is!