# Bevezetés az algebrába 2 – Differencia- és differenciálegyenlet-rendszerek

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék

BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

2016. május 30.

# **O**-hoz konvergálás

**T** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ pontosan akkor teljesül, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

**B** $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{A}^k = \mathbf{CJ}^k\mathbf{C}^{-1}$

Egy $m \times m$-es Jordan-blokkra

$$\mathbf{J}_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

- így $\lim_{k\to\infty} \mathbf{J}^k = \mathbf{O}$ esetén $\lambda^k \to 0 \rightsquigarrow |\lambda| < 1$.
- $(\Leftarrow)$ $|\lambda| < 1$ esetén

$$\left|\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\right| \leqslant \frac{k^i|\lambda|^{k-i}}{i!} \to 0$$

# Neumann-sor

**T** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ pontosan akkor konvergens, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$, és ez esetben $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

**B** $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ konvergens $\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_\lambda^k$ konvergens minden Jordan-blokkra $\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ konvergens $\rightsquigarrow$ $|\lambda| < 1$.

■ $(\Leftarrow)$ $\rho(\mathbf{A}) < 1 \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O} \rightsquigarrow$
$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \to \mathbf{I} \rightsquigarrow$
$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1} + \dots$ konvergens és $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

# Konvergens mátrixhatványok

**T** Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ pontosan akkor konvergens, ha

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{A}) < 1 & \text{vagy, ha} \\ \rho(\mathbf{A}) = 1 & \text{ahol } \lambda = 1 \text{ az egyetlen sajátérték a spektrálkörön,} \\ & \text{és a } \lambda = 1 \text{ geometriai és algebrai multiplicitása azonos.} \end{cases}$$

Konvergencia esetén $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{P}_1$, az $\mathcal{N}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$-re az $\mathcal{O}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ mentén való vetítés mátrixa (az 1-hez tartozó spektrálvetítő).

**B** Ha $\rho(\mathbf{A}) > 1$ a hatványok divergálnak, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$, **O**-hoz konvergálnak. Marad az $\rho(\mathbf{A}) = 1$ eset.

- Ha a spektrálkörön van 1-től különböző sajátérték, akkor a hozzá tartozó Jordan-blokk hatványainak főátlóiban az $ce^{k\mathrm{i}\varphi}$ hatványok végtelen osszcilláló sorozatot adnak, ami miatt $\mathbf{A}^k$ is divergens marad.

- Ha $\lambda = 1$-hez tartozik egy $m > 1$ rendű Jordan-blokk, akkor annak hatványai divergensek:

$$\begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{m-1} \\ 0 & 1 & \dots & \binom{k}{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Marad az az eset, hogy az 1-hez tartozó minden Jordan-blokk $1 \times 1$-es ($\mathbf{I}^k \to \mathbf{I}$, tehát konvergens).
- Ekkor, ha az 1 multiplicitása $s$, akkor

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{J}^k\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2]\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \hline \mathbf{Y}_2^T \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} [\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2]\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \hline \mathbf{Y}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^T = \mathbf{P}_1$$

# Fibonacci-sorozat explicit alakja

**P** A Fibonacci-sorozat $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) explicit alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

**M** Keressünk a rekurzív képletre $F_n = \lambda^n$ alakú megoldást!
$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Az $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots)$ sorozatok lin. ftlenek, ui. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} \neq 0$

- Lineáris kombinációik mind megoldások: $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- A kezdeti feltételek ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$) kielégítéséhez megoldandó

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

# Állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet

**D** $d$-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet: $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_d x_{n-d}$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_d$ és a kezdeti feltételül szolgáló $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ adott konstansok, $x_d, x_{d+1}, \ldots$ ismeretlenek. A DE karakterisztikus polinomja $\chi(t) = t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} - \ldots - a_d$, gyökei a sajátértékek.

**Á** Ha $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ és $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ megoldásai egy (állandó együtthatós) homogén lineáris differenciaegyenletnek, akkor tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ konstansokra $(cx_0 + dy_0, cx_1 + dy_1, \ldots)$ is.

**T** Ha $\lambda_i$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $x_n = \sum_i c_i \lambda_i^n$ megoldása az egyenletnek. Ha a sajátértékek különbözők, akkor ilyen alakban az összes megoldás megkapható.

**B** Ha $\lambda_i$-k különbözők, akkor $d$ független megoldásunk van (mert a Vandermonde-determinánsuk nem 0), így minden kezdeti feltétel egyértelműen megoldható lineáris egyenletrendszerre vezet.

**m** Ha $\lambda$ multiplicitása $r$, akkor a független megoldások a következők: $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \ldots, n^{r-1}\lambda^n$.

**P** $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

**M** $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \rightsquigarrow$

Összes megoldás: $x_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$.

Kezdeti feltételekből: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$,

■ $x_n = 1 - 2^n + n2^n$, $(0, 1, 5, 17, 49, 129, \ldots)$

# Differenciaegyenletrendszer

**D** Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \qquad \text{homogén}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \qquad \text{inhomogén}$$

ahol $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \ldots$ ismert vektorok, $\mathbf{x}_k$ ismeretlen, ha $k > 0$.

**T** Az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0, \qquad \text{(homogén)}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i}\mathbf{b}_i, \qquad \text{(inhomogén)}$$

ahol $k > 0$.

**m** Minden állandó együtthatós *d*-edrendű lineáris differenciaegyenlet átírható elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszerré, ui. ha $x_n - a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} - \ldots - a_d x_{n-d} = 0$, azaz $x_d - a_1 x_{d-1} - a_2 x_{d-2} - \ldots - a_d x_0 = 0$, akkor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{d-1} & a_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{d-2} \\ x_{d-1} \end{bmatrix}, \quad \text{vagy}$$

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_{d-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d-1} \\ x_{d-2} \\ \vdots \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

Előbbi a kísérő mátrix transzponáltja.

**P** Számítsuk ki az alábbi $n$-edrendű determináns értékét:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**M** $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, ugyanis az első sor szerint kifejtve

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & & & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

- $D_1 = 2,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = 1$

  A két független megoldás $(1, 1, 1, 1, \dots)$, $(0, 1, 2, 3, \dots)$
- $c_1 + 0c_2 = 2,\ c_1 + c_2 = 3 \rightsquigarrow c_1 = 2,\ c_2 = 1$
- $\rightsquigarrow D_n = n + 1.$

**P** Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha $a \in \mathbb{R}$ konstans, $a \neq k\pi$:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a}\,\mathrm{d}x$$

**M** $I_0 = 0,\ I_1 = \pi,\ I_{n+1} - (2\cos a)I_n + I_{n-1} = 0$, ugyanis

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx \cos x - \sin nx \sin x - \cos na \cos a + \sin na \sin a}{\cos x - \cos a}$$
$$- 2\cos a \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a}$$
$$+ \frac{\cos nx \cos x + \sin nx \sin x - \cos na \cos a - \sin na \sin a}{\cos x - \cos a}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi 2\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \text{ mert } n > 0.$$

- $\lambda^2 - (2\cos a)\lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{2\cos a \pm \sqrt{4\cos^2 a - 4}}{2} = \mathrm{e}^{\pm a\mathrm{i}}$

  az alapmegoldások: $(1, \mathrm{e}^{a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{2a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{3a\mathrm{i}}, \dots)$, $(1, \mathrm{e}^{-a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-2a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-3a\mathrm{i}}, \dots)$.

  $c_1 + c_2 = 0$, $c_1\mathrm{e}^{a\mathrm{i}} + c_2\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}} = \pi \rightsquigarrow$

  $c_1(2\mathrm{i}\sin a) = \pi \rightsquigarrow c_1 = \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}$

- $I_n = \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na + \mathrm{i}\sin na) - \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na - \mathrm{i}\sin na) = \pi\dfrac{\sin na}{\sin a}$

**D** Elsőrendű explicit nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \text{ahol } \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Autonóm, ha időfüggetlen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{ahol } \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Állandó együtthatós lineáris (autonóm lineáris), ha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \ \text{ahol } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{2}$$

Az autonóm DER egy konstans $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$ megoldását egyensúlyi helyzetnek nev.

**Á** A konstans $\mathbf{u}$ pontosan akkor egyensúlyi helyzete az (1) egyenletnek, ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

**Á** Invertálható $\mathbf{A}$ esetén a (2) lineáris DER egyetlen egyensúlyi helyzete a $\mathbf{0}$.

# Stabilitás

**D** AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzetet stabil, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha bármely olyan $\mathbf{x}(t)$ megoldásra, melyre $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ és $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}| < \delta$, igaz hogy $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}| < \varepsilon$ a $t \geqslant 0$ intervallumon.

AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzet instabil, ha nem stabil.

AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzetet aszimptotikusan stabil, ha stabil, és van olyan $\alpha > 0$, hogy ha $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}| < \alpha$, akkor $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$.

**T** Legyen $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. A $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER egy $\mathbf{x}(t)$ megoldása

- pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ minden $i = 1, \dots, s$ esetén.
- pontosan akkor stabil, ha $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leqslant 0$ minden sajátértékre, és ha valamelyik $\lambda_i$ sajátértékre $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$, akkor a geometriai és algebrai multiplicitások egyenlők.

# Lineáris DER megoldása

**Á** A Jordan-blokkok függvénye alapján

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**T** $(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t})' = \mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$

**B** pl. hatványsorral

**T** Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti érték probléma megoldása $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$.

**B** $(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0)' = \mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, vagyis megoldás, másrészt kielégíti a kezdeti feltételt, ui. $\mathrm{e}^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}_0 = \mathbf{I}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

**Á** Az $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER bármely $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ megoldásának bármely $c\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2$ lin. kombinációja megoldás.

**B** Egyszerű behelyettesítéssel:

$$(c\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2)' = c\mathbf{x}_1' + d\mathbf{x}_2' = c\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + d\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(c\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2)$$

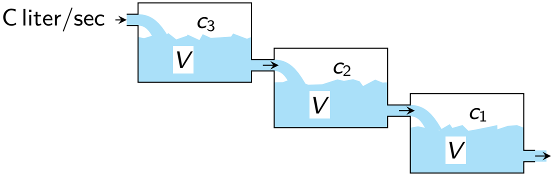
**m** Mivel minden megoldáshoz tartoznak kezdeti feltételek, és minden kezdetiérték-probléma megoldható az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, ezért minden megoldás $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ oszlopainak lineáris kombinációja.

**m** Az előzőek szerint az $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER megoldásai vektorteret alkotnak, és annak minden vektora előáll az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, tehát ezek az oszlopvektorok bázist alkotnak a megoldások terében, ha lineárisan függetlenek (ezt később belátjuk).

**D** Az $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER megoldásai terének valamely bázisát alaprendszernek nevezzük.

# Példa

**P** Három tartály mindegyikében szennyezett víz van, a szennyezőanyag mennyisége kezdetben $c_1$, $c_2$, $c_3$ a $V$ liter mennyiségű vízben. A harmadik tartályba tiszta víz folyik $C$ liter/sec sebességgel, minden tartályból ugyanekkora sebességgel folyik ki az összekeveredett víz. Mennyi a szennyezőanyag mennyisége a tartályokban $t > 0$ esetén, ha feltételezzük, hogy a víz nagyon gyorsan és egyenletesen összekeveredik.



**M** Jelölje $x_i(t)$ az $i$-edik tartálybeli szennyező mennyiségét. $\Delta t$ idő alatt $C\Delta t$ mennyiségű tiszta víz folyik be, ugyanennyi ki, de a befolyó szennyező mennyisége 0, a kifolyóé $\dfrac{x_3(t)}{V}C\Delta t$. Így

$$\frac{\Delta x_3(t)}{\Delta t} = \frac{0 - \frac{x_3(t)}{V}C\Delta t}{\Delta t} \quad \rightsquigarrow \quad x_3'(t) = -\frac{C}{V}x_3(t).$$

A másik két tartályba van befolyó szennyezés is, így a kapott három differenciálegyenlet mátrixalakban a következő:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \frac{C}{V}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-alakjából leolvasható, mivel az épp a Jordan-alak konstansszorosa. Így elég $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ helyett $\mathrm{e}^{\frac{C}{V}t\mathbf{J}}$-t számolni:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathrm{e}^{\frac{C}{V}t\mathbf{J}} = \mathrm{e}^{-\frac{C}{V}t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{C}{V}t & \frac{1}{2}(\frac{C}{V}t)^2 \\ 0 & 1 & \frac{C}{V}t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Innen a megoldás, figyelembe véve a kezdeti feltételeket is:

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\frac{C}{V}t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2\frac{C}{V}t + c_3\frac{1}{2}(\frac{C}{V}t)^2 \\ c_2 + c_3\frac{C}{V}t \\ c_3 \end{bmatrix}$$

**P** Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**1M** $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 3$

- Sajátvektor: $(1,1)t$, Jordan-lánc: $(-1,-1) \leftarrow (1,0)$
- $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- $\mathrm{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$, $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{C}\mathrm{e}^{Jt}\mathbf{C}^{-1} = \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} -t+1 & t \\ -t & t+1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} -t+1 & t \\ -t & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}$

**2M** $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda-3)^2$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 3$, $m_1 = 2$, $j = 0, 1$, $i = 1$ a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \ i = 1, \dots, k$$

képletben.

- $f(x) = \mathrm{e}^{xt}$, $f'(x) = t\mathrm{e}^{xt}$,
- $p(x) = ax + b$, $p'(x) = a$,

$$\begin{array}{ll} f(3) = p(3) & \mathrm{e}^{3t} = 3a + b \\ f'(3) = p'(3) & t\mathrm{e}^{3t} = a \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} a = t\mathrm{e}^{3t} \\ b = (1-3t)\mathrm{e}^{3t} \end{array} \rightsquigarrow$$

- $p(x) = t\mathrm{e}^{3t}x + (1-3t)\mathrm{e}^{3t} \rightsquigarrow$
  $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = p(\mathbf{A}) = t\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + (1-3t)\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = t\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (1-3t)\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}$

**3M** Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ és $\lambda$ geometriai multiplicitása 1, algebrai 2, a Jordan-lánc $0 \leftarrow \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v}$, akkor $\{\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{u},\ t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{u} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}\}$ alaprendszer, ui.

$$\mathbf{x} = c_1(\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{u}) + c_2(t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{u} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v})$$

- Esetünkben $\lambda = 3$, $\mathbf{u} = (-1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$, így az összes megoldás

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + c_2 t\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

- A kezdeti feltétel $x(0) = (1, 2)$, ebből

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = -2,\ c_2 = -1$$

- A kezdetiérték-probléma megoldása

$$\mathbf{x}(t) = -2\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} - t\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} - \mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}t+1\\t+2\end{bmatrix}.$$

# Megoldások függetlensége

**D** Az $(a, b)$ intervallumon értelmezett $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, $\dots \mathbf{x}_n(t)$ függvények függetlenek $(a, b)$-n, ha

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn minden $t \in (a, b)$ helyen, ha $c_1 = \dots = c_n = 0$.

**T** Ha a $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ Wronski-determináns legalább egy pontban nem 0, akkor a függvények függetlenek, ahol

$$W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

ahol $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$.

**B** trivi: ha $W$ egy $t$ helyen nem 0, akkor a $c_i$-kre vonatkozó egyenletrendszer egyértelműen megoldható! (A tétel megfordítása nem igaz pl. $(t^2, t), (t, 1)$.)

**P** Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ DER alaprendszerét alkotják $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ oszlopai. Igazoljuk Wronski-determinánssal, hogy ezek lineárisan független függvények!

**M** Az alaprendszer Wronski-detrminánsa $\det(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t})$.

$\det(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}) = \mathrm{e}^{t\sum_j \lambda_j} \neq 0$ egyetlen $t$ helyen sem.

# Lineáris differenciálegyenlet és differenciálegyenlet-rendszer

**Á** Az $y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y$ DE ekvivalens a következő DER-rel:

$$\begin{bmatrix} y^{(n)} \\ y^{(n-1)} \\ \vdots \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(n-1)} \\ y^{(n-2)} \\ \vdots \\ y' \\ y \end{bmatrix}$$

# Wronski-determináns

**D** Az $I$ intervallumon értelmezett és ott legalább $n-1$-szer diffható $y_1$, $y_2,\ldots,$ $y_n$ függvények Wronski-determinánsán a

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

függvényt értjük.

**T** Ha az $I$ intervallumon értelmezett és ott legalább $n-1$-szer diffható $y_1$, $y_2,\ldots,$ $y_n$ függvények Wronski-determinánsa az $I$-n nem azonosan 0, akkor e függvények lineárisan függetlenek.

**B** $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0 \rightsquigarrow c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)} + \ldots + c_ny_n^{(k)} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Az egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ami ha valamely $t \in I$ helyen nem 0, az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

**m** Az állítás megfordítása nem igaz:

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

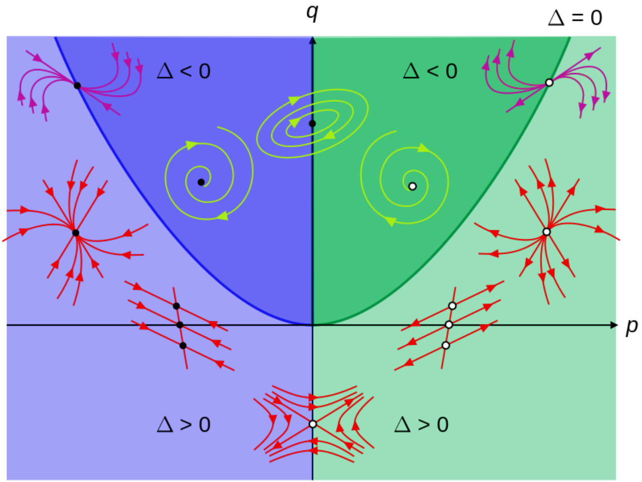
$W(y_1, y_2) = 0$, de a fv-ek függetlenek.

# A fázissíkról

- 2-dimenziós esetben a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásai szépen szemléltethetőek.

**D** Az autonóm $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) egyenletrendszerek megoldásai az $\mathbb{R}^n$ térben görbeként ábrázolhatók. Bizonyos feltételek mellett (pl. ha $\mathbf{f}$ lineáris), minden ponton át pontosan egy pályagörbe (trajektória) halad. Az $\mathbb{R}^n$ teret fázistérnek, a trajektóriákat, és/vagy egy rács $\mathbf{x}$ pontjaiba húzott $\mathbf{x}'$ vektorokat is tartalmazó ábrát fázisportrénak nevezik.

- Egy „phase portrait” mathlet
- A Wikipédia a fázis-síkról, és az onnan származó rajz a következő oldalon:




$$\frac{dx}{dt} = Ax + By \qquad p = A + D$$

$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy \qquad q = AD - BC$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$