Vizsgakérdések – Bevezetés az algebrába 2 – 2015/16 tavaszi félév

(1.01 változat)

Vektorterek **D** Vektortéraxiómák, altér, generátorrendszer, függetlenség, bázis, dimenzió, lineáris leképezés, lineáris transzformáció, vektorok koordinátavektorai, lineáris leképezések koordinátamátrixai **B** Kicserélési tétel **D** Végtelen dimenziós terekben függetlenség és generálás **B** Végtelen dimenziós tér valódi altere lehet azonos dimenziós, véges dimenziós térben ez nem fordulhat elő. **D** Alterek összege, direkt összege. Ekvivalensei. **B** Direkt összeg dimenziója.

Sajátérték, sajátvektor **D** Lineáris transzformáció illetve mátrix sajátértéke, sajátvektora, karakterisztikus polinom **B** Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása **D** Sajátaltér, invariáns altér, algebrai és geometriai multiplicitás **D** Mátrix (transzformáció) anulláló polinomja, minimálpolinom **B** Minimálpolinom osztója minden anulláló polinomnak **B** Minimálpolinom gyökei **B** Minimálpolinom konstans szorzótól eltekintve egyértelmű **B** Cayley–Hamilton-tétel **B** Determináns = sajátértékek szorzata, nyom = sajátértékek összege **D** Mátrixok hasonlósága **B** Hasonló mátrixok karakterisztikus és minimálpolinomjai azonosak **B** Felső háromszög mátrix sajátértékei **B** Diagonalizálható mátrixok jellemzései **B** Spektrálfelbontás (sajátalterekre való projekciókkal, diadikus alak is) **B** Gersgorin-körökről szóló tétel

SVD **B** $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit **D** Mátrix szinguláris értéke, szinguláris vektorok, **D** SVD (redukált, teljes) **B** SVD megkonstruálása, kitüntetett alterek ONB-ai **B** SVD-ből pszeudoinverz **D** Poláris felbontás **B** Poláris felbontás létezése, invertálható esetben egyértelműsége **B** SVD-ből poláris felbontás **T** Eckart–Young-tétel

Mátrixnormák **D** Vektornormák: p-norma, ∞-norma, 1-norma **D** Mátrixnormák: Frobenius-norma, indukált norma, 1-, 2- (spektrális), ∞-normák **D** Spektrálsugár **B** 2-norma = maximális szinguláris érték

Jordan-féle normálalak **D** Jordan-blokk, Jordan-mátrix **B** Jordan-féle normálalak létezése, egyértelműsége **D** Jordan-lánc, Jordan-bázis **D** Mátrixfüggvények **D** Hermite-féle interpolációs polinom **B** Jordan-blokk polinomja, függvénye **B** Mátrixfüggvény kiszámolása Jordan-bázis valamint Hermite-interpoláció segítségével **T** Elsőrendű lineáris homogén diffegyenlet-rendszer megoldásai vektorteret alkotnak **D** Alaprendszer **B** Alaprendszer megkonstruálása $e^{\mathbf{A}t}$ segítségével **B** Kezdeti érték feladat megoldása **D** Stabilitás, aszimptotikus stabilitás **T** A diffegyenlet-rendszer stabilitása az együtthatómátrix sajátértékei alapján

Bilineáris függvények **D** Komplex és valós bilineáris függvények **D** Felírásuk adott bázisban, bilineáris függvény Gram-mátrixa **B** Báziscsere hatása a Gram-mátrixra valós és komplex esetben **D** Szimmetrikus, szimplektikus, Hermite-féle bilineáris függvények **B** Jellemzésük Gram-mátrixaikkal **D** Kvadratikus alak **B** Komplex bilineáris függvények és kvadratikus alakjaik között bijekció van **T** Kvadratikus alak pontosan akkor valós értékű, ha a bilineáris függvény Hermite-féle **B** Több valós bilineáris függvényhez tartozhat ugyanaz a kvadratikus alak, de csak egy szimmetrikus tartozik hozzá **D** Kvadratikus alak négyzetösszeggé transzformálása **D** Valós kvadratikus alak mátrixa **B** Minden szimmetrikus (Hermite) bilineáris függvény mátrixa alkalmas bázisban diagonális. Következmények kvadratikus alakokra **B** Tehetetlenségi tétel **B** Másodrendű görbék kanonikus alakra hozása **B** Fisher-egyenlőtlenség

Valós és komplex euklideszi terek **D** Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$ és C^n terekben **D** Valós és komplex euklideszi tér **D** Merőlegesség, vektor hossza, valós euklideszi terekben vektorok szöge. Ortogonális, ortonormált vektorrendszer **B** Minden véges dimenziós euklideszi térben van ONB (Gram–Schmidt-féle eljárás, valós és komplex eset) **B** Ortonormált vektorrendszer független **B** CBS-egyenlőtlenség **D** Altér merőlegese **B** Véges dimenziós euklideszi térben $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathcal{V}$, $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$ **T** Altérre való merőleges vetület skaláris szorzás segítségével **B** $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ **D** Skaláris szorzat Gram-mátrixa, skaláris szorzat felírása adott bázisban **B** Skaláris szorzat Gram-mátrixának változása báziscsere esetén

Speciális mátrixok **D** Ortogonális (unitér), szemiortogonális mátrixok **B** Ortogonális (unitér) illetve szemiortogonális mátrix ekvivalens definíciói **B** Ortogonális (unitér) mátrix mátrixleképezésének jellemzése **D** Givens-forgatás, Householder-tükrözés **B** Teljes oszloprangú mátrix QR-felbontásának létezése és egyértelműsége (kiszámítása Givens-forgatásokkal, Householder-tükrözésekkel is) **B** Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontás segítségével **D** Szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, önadjungált, ferdén önadjungált, normális mátrixok, kapcsolatuk **T** $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ ekvivalens **B** Minden mátrix egyértelműen bontható önadjungált és ferdén önadjungált mátrix összegére **B** valós szimmetrikus mátrix ortogonális, komplex normális mátrix unitér diagonalizálhatósága **B** Schur-felbontás **B** Főtengelytétel (valós és komplex) **T** Valós normális (ortogonális, ferdén szimmetrikus) mátrixok blokkdiagonális alakja

Lineáris transzformációk euklideszi terekben **D** Lineáris transzformáció adjungáltja **B** Adjungált transzformáció létezése és egyértelműsége **B** Adjungált transzformáció mátrixa ON és nem ON bázisokban **D** Szimmetrikus, önadjungált, ortogonális, unitér, normális transzformációk **B** A fenti transzformációk jellemzése mátrixukkal ONB-ban **B** A speciális mátrixokkal való szorzás az euklideszi tér azonos nevű transzformációja **B** Önadjungált (szimmetrikus) transzformációk jellemzése **B** Unitér (ortogonális) transzformációk jellemzése **B** Komplex normális transzformációk jellemzése **T** Valós normális transzformációk jellemzése

Vektortér-konstrukciók **D** Altér, alterek összege, direkt összeg, direkt szorzat, faktortér, duális tér, lineáris leképezések tere **B** A fenti vektorterek dimenziói, bázisai véges dimenziós esetben **B** $\mathcal{V}^{**} \cong \mathcal{V}$, véges dimenzióban **B** Áttérési mátrixok kapcsolata a duális bázisoknál **B** Euklideszi tér duális terének minden eleme alkalmas vektorral vett skaláris szorzás **D** Multilineáris leképezések és a tenzorszorzat **B** Multilineáris leképezések és tenzorszorzat kapcsolata **B** Homomorfia-tétel (izomorfia-tétel) **B** Minden n dimenziós $\mathbb{F}$ test feletti vektortér $\mathbb{F}^n$-el izomorf **B** Minden n dimenziós valós (komplex) euklideszi tér között van skalárszorzattartó vektortér-izomorfizmus **B** $\mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cong M_{n\times m}[\mathbb{F}] = \mathbb{F}^{n\times m}$ **D** p-szeresen kontravariáns és q-szorosan kovariáns tenzorok tere **T** Báziscsere hatása a tenzor együtthatóira **T** $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ elemei és a bilineáris függvények, mint tenzorok