

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 2

2. vizsga – elmélet

2016-06-15

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A választásokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) Ha egy \mathcal{V} vektortérnek \mathcal{B} egy bázisa, és \mathcal{W} a \mathcal{V} egy altere, akkor a \mathcal{B} bázisnak van olyan részalmutaja, mely a \mathcal{W} bázisa. H

b) Egy Jordan-blokk minimálpolinomja megegyezik a karakterisztikus polinomjával. I

c) Ha egy $n \times n$ -es komplex mátrix unitér, akkor normális is. I

d) A sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege megadja a mátrix Jordan-blokkjainak számát. I

e) Minden valós mátrix hasonló egy valós felsőháromszög-mátrixhoz. H

f) Minden nilpotens mátrix diagonalizálható. H

2. Melyik alternál az alábbiak közül az \mathbb{R} feletti valós számsorozatok vektorterében? (a) konvergens valós sorozatok, (b) a divergens valós sorozatok, (c) zérussorozatok, (d) 1-hez konvergáló sorozatok, (e) \mathbb{Z} -beli elemekből álló sorozatok. (2 pont)

(a) igen, (b) nem, (c) igen, (d) nem, (e) nem.

3. Legyen \mathcal{V} vektortér és legyen benne \mathcal{W} alternál. Mik lesznek a \mathcal{V}/\mathcal{W} faktortér elemei és hogy vannak értelmezve rajtuk a műveletek? (2 pont)

elemek: $\mathbf{v} + \mathcal{W}$, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, műveletek: $\mathbf{v} + \mathcal{W} + \mathbf{u} + \mathcal{W} := \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathcal{W}$, $\lambda(\mathbf{v} + \mathcal{W}) := \lambda\mathbf{v} + \mathcal{W}$.

4. Egy valós ortogonális mátrix valós blokkdiagonális alakjában milyen 2×2 -es és 1×1 -es blokkok vannak? (2 pont)

elforgatás blokkok és ± 1

5. Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ egy \mathcal{V} valós euklideszi tér egy \mathcal{W} alternálban ONB. Hogyan számítható ki egy $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor \mathcal{W}^\perp alternálra való merőleges vetülete e bázis segítségével. (A skalárszorzat legyen az $f(\cdot, \cdot)$ vagy a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilineáris függvény.) (2 pont)

$$\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$$

6. Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, és legyen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ az \mathcal{U} bázisa úgy, hogy \mathcal{V} bázisa $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, \mathcal{W} bázisa $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Írjuk fel a \mathcal{W} mentén \mathcal{V} -re való vetítés egy sajátvektorokból álló bázisára vonatkozó mátrixát. (2 pont)

Sajátvektorokból álló bázis: $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, mátrix: $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

7. Tekintsük valós mátrixokon az alábbi mátrixtulajdonságokat: (A) szimmetrikus, (B) ferdén szimmetrikus, (C) normális, (D) ortogonális, továbbá a következőket: (a) ortogonálisan diagonalizálható, (b) unitéren diagonalizálható. (2 pont)

Mindegyik nagybetűs tulajdonságot állítsuk párba valamelyik kisbetűssel, és jelezzük a köztük lévő implikáció irányát (azaz $X \Leftrightarrow x$, $X \Rightarrow x$, $X \Leftarrow x$ alakú kapcsolatok listáját kérjük).

$A \Leftrightarrow a, B \Rightarrow b, C \Leftrightarrow b, D \Rightarrow b.$

8. Az alábbi táblázat bal felében egy nem nulla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ együtthatómátrixú $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x} = 0$ megoldásának tulajdonságai sorszámozott listáját, jobb felében sajátértékekre vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Adjuk meg, hogy melyik tulajdonság mely sajátérték feltételek esetén teljesülhet. (2 pont)

tulajdonság		λ_1, λ_2
1: aszimptotikusan stabil	A:	$\text{Re}(\lambda_1) > 0, \text{Re}(\lambda_2) > 0$
2: stabil	B:	$\text{Re}(\lambda_1) < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0$
3: instabil	C:	$\text{Re}(\lambda_1) = 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0$

1B, 2C, 3A

9. Mit értünk azon, hogy egy \mathcal{V} vektortér a \mathcal{W}_i ($i = 1 \dots k$) altereinek direkt összege? (definíció) (2 pont)

10. Definiáljuk egy bilineáris függvény Gram-mátrixának a fogalmát! (2 pont)

11. Fogalmazzuk meg a Gersgorin-körökről szóló tételt! (3 pont)

12. Mondjuk ki a Fisher-egyenlőtlenségről szóló tételt! (3 pont)

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris egyenletrendszerek optimális megoldásának QR-felbontással való előállításáról szóló tételt! (5 pont)

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a tehetetlenségi tételt! (5 pont)