E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ____________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2016-06-15**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ortonormált rendszert alkotnak-e a polinomok terében az $\frac{1}{2}$ és a $\sqrt{\frac{3}{2}}x$ polinomok, ha p és q skaláris szorzata

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nem, nem egységnyi hosszúak

E2. Adjuk meg azt a Givens-forgatást, amely az $(5, 0, 12)$ vektort a $(0, 0, 13)$ vektorba viszi!

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{13} & 0 & \frac{12}{13} \end{bmatrix}$$

E3. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix 2-normáját (más néven spektrálnormáját) és Frobenius-normáját!

$\|\mathbf{A}\|_2 = 4$, $\|\mathbf{A}\|_F = 5$

E4. Ha az $\mathbf{A}$ reguláris mátrixnak a $\mathbf{v}$ vektor λ sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixnak $\mathbf{v}$ milyen sajátértékhez tartozó sajátvektora?

$1/\lambda$

E5. Írjuk fel a 3-dimenziós tér egy origón átmenő egyenesére való tükrözés karakterisztikus és minimálpolinomját!

$\chi(x) = (x+1)^2(x-1)$, $\mu(x) = (x+1)(x-1)$

E6. Mi lesz a $g : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban, ha $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$ a standard bázisban és $\mathcal{B} = \{ (1, 1), (-1, 1) \}$?

$\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{B} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E7. Unitér-e a következő mátrix?

$$\begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Igen

E8. Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixot, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$!

$$\begin{bmatrix} e^{9t} & te^{9t} & \frac{1}{2}t^2e^{9t} & 0 \\ 0 & e^{9t} & te^{9t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{9t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$$

---

1. Egy kvadratikus forma standard bázisbeli alakja

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Adjunk meg olyan bázist, amelyben ez négyzetösszeg lesz és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot! Mi a kvadratikus alak jellege? Adjunk meg egy bilineáris függvényt, amelyhez ez a kvadratikus alak tartozik!

Sajátértékek 2, 0, pozitív szemidefinit, a sajátvektorok: $(-1, 1)$, $(1, 1)$.
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, így a kvadratikus alak a sajátvektorok bázisában $4\xi^2$, (ONB esetén $2\xi^2$)
bilineáris függvény: $x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2$.

2. Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 6 \\ x - 3y &= 3 \\ 2x \quad\;\; &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszer QR-felbontását Gram–Schmidt-eljárással, majd a minimális abszolút értékű optimális megoldását!

A QR-felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer optimális megoldása: $(3, 0)$.

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix teljes és redukált SVD-felbontását! A felbontásból olvassuk le a mátrix egy poláris felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teljes ($\mathbf{U}$ második oszlopa lehet a -1-szerese is): $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

redukált: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Polár: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (a második mátrix második oszlopa lehet a -1-szerese is)

4. Legyenek egy 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: 2, 3. Az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix hatványainak rangja legyen 5, 3, 2, az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ mátrix hatványainak rangja legyen 6, 5. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

A 2 ötszörös, a 3 kétszeres multiplicitású:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

5. A karakterisztikus polinom felírása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixnak 2 valós sajátértéke van! A számegyenes mely tartományába esnek a sajátértékek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Gersgorin-körök a sorok szerint: 1 középű, 1/2-sugarú, 3 középű 1 sugarú, mindegyik körben egy sajátérték van, tehát azok valósak.
A sor szerint tartomány: $[1/2, 3/2] \cup [2, 4]$, az oszlop szerinti $[0, 2] \cup [5/2, 7/2]$,
a metszetük: $[1/2, 3/2] \cup [5/2, 7/2]$.

6. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját. Adjunk meg egy Jordan-bázist, valamint a Jordan-láncokat! Számítsuk ki $e^{2\mathbf{A}}$-t!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Jordan-láncok: $\mathbf{0} \leftarrow (5, 0, 0, 0) \leftarrow (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{0} \leftarrow (0, 0, 6, 0) \leftarrow (0, 0, 0, 1)$,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right], \; e^{2\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{10} & 10e^{10} & 0 & 0 \\ 0 & e^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{12} & 12e^{12} \\ 0 & 0 & 0 & e^{12} \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

differenciálegyenlet-rendszer egy alaprendszerét! Stabilis-e az $\mathbf{x} = 0$ megoldás?

A sajátértékek -4, -2, így megoldás stabil, mivel mindkét sajátérték valós része negatív, $e^{\mathbf{A}t} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right] e^{\left[\begin{smallmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]t} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$ oszlopvektorai adják az alaprendszert. Másik mo. a sajátvektorokból: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

8. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb n-edfokú, valós egyváltozós polinomok $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}_n[x]$ vektortere izomorf $\mathbb{R}^{n+1}$-gyel! Definiáljunk $\mathbb{R}_n[x]$-en egy olyan valós skaláris szorzatot, melyre $1, x, \ldots x^n$ ortonormált bázis lesz! Mi lesz két polinom skaláris szorzata ekkor?

Az $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ leképezés művelettartó $\mathbb{R}_n[x]$ és $\mathbb{R}^n$ között, kölcsönösen egyértelmű, így izomorfizmus.
$\langle a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$.