E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2016-06-01**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ortonormált-e az $\{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$ vektorrendszer?

nem

E2. Adjuk meg azt a Housholder-tükrözést, amely az $(1,\sqrt{3})$ vektort a $(2,0)$ vektorba viszi!

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

E3. Adjuk meg az $(i+1,-1,i)$ és $(1-i,2,1)$ vektorok távolságát!

$z=(-2i,3,1-i)$, $\sqrt{z^{\mathsf{H}}z}=\sqrt{15}$

E4. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak a $\mathbf{v}$ vektor λ sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix $p(\mathbf{A})$ polinomjának $\mathbf{v}$ milyen sajátértékhez tartozó sajátvektora?

$p(\lambda)$

E5. Írjuk fel a 3-dimenziós tér egy origón átmenő síkjára való tükrözés karakterisztikus és minimálpolinomját!

$\chi(x)=(x-1)^2(x+1)$, $\mu(x)=(x-1)(x+1)$

E6. Mi lesz az $(1,2,3)$ standard bázisbeli vektor koordinátavektora az $\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\,\}$ bázisban?

$(2\sqrt{2},2,\sqrt{2})$ (a bázis ortonormált, így elég a skalárszorzatokat számolni)

E7. Döntsük el, hogy unitér-e és hogy unitéren diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

nem unitér, de unitéren diagonalizálható, mert normális.

E8. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix polárfelbontását!

Akár az SVD-ből, akár „ránézésre" leolvasható: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

1. *(a)* Adjunk meg olyan 3×3-as valós mátrixot, melynek $(3,(1,0,-1)),(1,(1,1,1)),(-1,(0,1,0))$ három sajátpárja! *(b)* Írjuk fel e mátrix spektrálfelbontását és a sajátalterekre való projekciókat?

$\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3]$, $\mathbf{Y}=[3\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|-\mathbf{x}_3]$, $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=3\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Egy valós bilineáris függvény mátrixa egy bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Határozzuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és *(b)* jellegét! *(c)* Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvadratikus alak négyzetösszeg, és *(d)* írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

(a) $x^2+2xy+y^2=x^2+xy+yx+y^2 \rightsquigarrow \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$
(b) sajátértékei 2 és 0, így pozitív szemidefinit,
(c) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}$,
(d) $2\xi^2$ (a változók ξ és η)

3. *(a)* Határozzuk meg az alábbi mátrix teljes és redukált SVD-felbontását! *(b)* A felbontásból olvassuk le a mátrix nullterének valamint oszlopterének egy-egy ortonormált bázisát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ nemnulla sajátértéke 3.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\sqrt{3}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ *(b)* nulltér: $\mathbf{V}$ második két oszlopa, oszloptér: $\mathbf{U}$ első oszlopa

4. Legyen $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független, $\|\mathbf{p}\|_2 = \|\mathbf{q}\|_2 = 1$, és legyen $\mathbf{A} = \mathbf{p}\mathbf{q}^\top + \mathbf{q}\mathbf{p}^\top$. *(a)* Igazoljuk, hogy $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ sajátvektorai $\mathbf{A}$-nak. *(b)* Mely sajátértékekhez tartoznak e sajátvektorok? *(c)* Mik a mátrix további sajátértékei?

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{p}\pm\mathbf{q}) = (\mathbf{p}\pm\mathbf{q})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\pm 1)$ *(b)* $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\pm 1)$ *(c)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$, így az összes többi sajátérték 0.

5. Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú polinomot, mellyel az $\mathbf{A}^{12}$ mátrix értéke kiszámolható, ha $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$p(x) = 66 \cdot 3^{10} \cdot x^2 - 360 \cdot 3^{10} \cdot x + 495$
$\mathbf{A}^{12} = 66 \cdot 3^{10} \cdot \mathbf{A}^2 - 360 \cdot 3^{10} \cdot \mathbf{A} + 495\mathbf{I}$

6. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix *(a)* Jordan-féle normálalakját, *(b)* Jordan-láncait, *(c)* az $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Jordan-láncok:
$(16,0,0,0) \leftarrow (4,4,0,0) \leftarrow (0,0,1,0)$,
$(0,0,0,1)$

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{12} & 12\,e^{12} & 84\,e^{12} & 0 \\ 0 & e^{12} & 12\,e^{12} & 0 \\ 0 & 0 & e^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^9 \end{bmatrix}$

7. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0) = (1,-1)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ és $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ kiszámításával:
$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$
innen a megoldás: $(e^{2t}, e^{2t} - 2e^{3t})$

8. Mutassuk meg, hogy egy 2×2-es mátrixhoz annak nyomát rendelő leképezés $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál. Definiáljunk egy $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli skaláris szorzást és írjunk fel egy olyan $\mathbb{R}^{2\times 2}$-beli „vektort”, amellyel való skaláris szorzás épp ezt a funkcionált adja meg!

$\mathrm{trace}(c\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right] = c(p+s) + x + w = c\,\mathrm{trace}\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right] + \mathrm{trace}\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right]$, tehát lineáris funkcionál.
A skaláris szorzás $\langle \left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right] \rangle = px + qy + rz + sw = \mathrm{trace}(\left[\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right]^\top \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right])$
A keresett mátrix („vektor”) az egységmátrix, ugyanis $\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right] \rangle = x + w$
(A megoldáshoz könnyen eljutunk, ha kihasználjuk, hogy $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$)