1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet – elmélet** **2016-06':w -01**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Lehet-e egy végtelen dimenziós vektortérnek vele azonos dimenziós altere?

b) Igaz-e, hogy egy $n \times n$-es komplex mátrix diagonalizálható, akkor unitéren is diagonalizálható?

c) Igaz-e, hogy egy mátrix sajátértékének algebrai multiplicitása a mátrix összes Jordan-blokkjai száma?

d) Igaz-e, hogy egy mátrix minimálpolinomja gyökeként a mátrix összes sajátértéke előfordul?

e) Igaz-e, hogy minden négyzetes mátrix poláris felbontása egyértelmű?

f) Igaz-e,hogy szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak?

2. Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbf{R}[x]$ $\mathbf{R}$ feletti vektortérben? (a) a páros fokú $\mathbf{R}[x]$-beli polinomok,(b) az egész együtthatós polinomok, (c) a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok,(d) azok az $\mathbf{R}[x]$-beli polinomok, amelyeknek 2 gyöke, (e) a pontosan n-edfokú $\mathbf{R}[x]$-beli polinomok. *(2 pont)*

3. Hogyan változik egy komplex bilineáris függvény A Grammátrixa, ha B régi bázisról új B_1 bázisra térünk át? Legyen adott a $T = T_{B \leftarrow B_1}$ áttérési mátrix. *(2 pont)*

4. Ha egy A mátrix $f(A)$ függvényét szertnénk Hermite-féle interpolációs polinommal meghatározni, akkor milyen alappontokra és milyen deriváltértékekre, legfeljebb hanyadfokú polinomot kell felírnunk? *(2 pont)*

5. Legyen $e_1, \dots e_k$ egy (V, f) valós euklideszi tér egy W alterében ONB. Hogyan számítható ki egy $\mathbf{v} \in V$ vektor W altérre való merőleges vetülete e bázis segítségével. *(2 pont)*

6. Adott egy Hermite-féle bilineáris függvény mátrixa A. Hogyan néz ki a hozzá tartozó kvadratikus alak az A mátrix sajátvektorai komplex ON bázisában? *(2 pont)*

.

7. Mi egy $\mathbf{A} \in M_{m \times n}[\mathbb{C}]$ mátrix nullterének (komplex) merőleges kiegészítője? *(2 pont)*

8. Az alábbi táblázat bal felében lineáris transzformációk sajátértékének sorszámozott listáját találjuk, míg a jobb felében transzformációk betűkkel jelölt listáját. Soroljuk fel, hogy melyik transzformációnak milyen sajátértékei lehetnek. *(2 pont)*

sorszám	λ	betű	transzformáció
1:	$\|\lambda\| = 1$	A:	pozitív definit transzformáció
2:	$\lambda \in \mathbb{R}$	B:	unitér transzformáció
3:	$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	C:	szimmetrikus transzformáció
4:	$\lambda > 0$	D:	antiszimmetrikus transzformáció
5:	0	E:	forgatás 60^0-al

9. Definiáljuk egy vektortér generátorrendszerének fogalmát! *(2 pont)*

10. Definiáljuk egy euklideszi térben egy lineáris transzformáció adjungáltjának foglamát! *(2 pont)*

11. Fogalmazzuk meg a valós főtengely tételt! *(3 pont)*

12. Mondja ki az unitér transzformációk jellemzéséről szóló tételt ! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Homomorfia-tételt! *(5 pont)*

14. Mondja ki és bizonyítsa be a duális tér bázisáról szóló tételt!(véges dimenziós esetben) *(5 pont)*