1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ____________________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – elmélet** **2016-06-15**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. A matematikailag korrekt válaszra adunk maximális pontszámot. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha egy $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{B}$ egy bázisa, és $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ egy altere, akkor a $\mathcal{B}$ bázisnak van olyan részhalmaza, mely a $\mathcal{W}$ bázisa.

b) Egy Jordan-blokk minimálpolinomja megegyezik a karakterisztikus polinomjával.

c) Ha egy $n \times n$-es komplex mátrix unitér, akkor normális is.

d) A sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege megadja a mátrix Jordan-blokkjainak számát.

e) Minden valós mátrix hasonló egy valós felsőháromszög-mátrixhoz.

f) Minden nilpotens mátrix diagonalizálható.

2. Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbb{R}$ feletti valós számsorozatok vektorterében? *(a)* konvergens valós sorozatok, *(b)* a divergens valós sorozatok, *(c)* zérussorozatok, *(d)* 1-hez konvergáló sorozatok, *(e)* $\mathbb{Z}$-beli elemekből álló sorozatok. *(2 pont)*

3. Legyen $\mathcal{V}$ vektortér és legyen benne $\mathcal{W}$ altér. Mik lesznek a $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ faktortér elemei és hogy vannak értelmezve rajtuk a műveletek? *(2 pont)*

4. Egy valós ortogonális mátrix valós blokkdiagonális alakjában milyen 2×2-es és 1×1-es blokkok vannak? *(2 pont)*

5. Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ egy $\mathcal{V}$ valós euklideszi tér egy $\mathcal{W}$ alterében ONB. Hogyan számítható ki egy $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathcal{W}^{\perp}$ altérre való merőleges vetülete e bázis segítségével. (A skaláris szorzat legyen az $f(.,.)$ vagy a $\langle .,. \rangle$ bilineáris függvény.) *(2 pont)*

6. Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, és legyen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa úgy, hogy $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Írjuk fel a $\mathcal{W}$ mentén $\mathcal{V}$-re való vetítés egy sajátvektorokból álló bázisára vonatkozó mátrixát. *(2 pont)*

7. Tekintsük *valós* mátrixokon az alábbi mátrixtulajdonságokat: *(A)* szimmetrikus, *(B)* ferdén szimmetrikus, *(C)* normális, *(D)* ortogonális, továbbá a következőket: *(a)* ortogonálisan diagonalizálható, *(b)* unitéren diagonalizálható. *(2 pont)*

Mindegyik nagybetűs tulajdonságot állítsuk párba valamelyik kisbetűssel, és jelezzük a köztük lévő implikáció irányát (azaz $X \Leftrightarrow x$, $X \Rightarrow x$, $X \Leftarrow x$ alakú kapcsolatok listáját kérjük).

8. Az alábbi táblázat bal felében egy nem nulla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ együtthatómátrixú $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ diffegyenlet-rendszer $\mathbf{x} = 0$ megoldásának tulajdonságai sorszámozott listáját, jobb felében sajátértékeikre vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Adjuk meg, hogy melyik tulajdonság mely sajátérték feltételek esetén teljesülhet. *(2 pont)*

	tulajdonság		λ_1, λ_2
1:	aszimptotikusan stabil	A:	$\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$
2:	stabil	B:	$\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$
3:	instabil	C:	$\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$

9. Mit értünk azon, hogy egy $\mathcal{V}$ vektortér a $\mathcal{W}_i$ $(i = 1 \dots k)$ altereinek direkt összege? (definíció) *(2 pont)*

10. Definiáljuk egy bilineáris függvény Gram-mátrixának a fogalmát! *(2 pont)*

11. Fogalmazzuk meg a Gersgorin-körökről szóló tételt! *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a Fisher-egyenlőtlenségről szóló tételt! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris egyenletrendszerek optimális megoldásának QR-felbontással való előállításáról szóló tételt! *(5 pont)*

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a tehetetlenségi tételt! *(5 pont)*