E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2016-06-15**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc egyszerű kérdést kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ortonormált rendszert alkotnak-e a polinomok terében az $\frac{1}{2}$ és a $\sqrt{\frac{3}{2}}x$ polinomok, ha p és q skaláris szorzata

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

E2. Adjuk meg azt a Givens-forgatást, amely az $(5, 0, 12)$ vektort a $(0, 0, 13)$ vektorba viszi!

E3. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix 2-normáját (más néven spektrálnormáját) és Frobenius-normáját!

E4. Ha az $\mathbf{A}$ reguláris mátrixnak a $\mathbf{v}$ vektor λ sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixnak $\mathbf{v}$ milyen sajátértékhez tartozó sajátvektora?

E5. Írjuk fel a 3-dimenziós tér egy origón átmenő egyenesére való tükrözés karakterisztikus és minimálpolinomját!

E6. Mi lesz a $g : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban, ha $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$ a standard bázisban és $\mathcal{B} = \{\,(1, 1), (-1, 1)\,\}$?

E7. Unitér-e a következő mátrix?

$$\begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

E8. Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixot, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$!

---

1. Egy kvadratikus forma standard bázisbeli alakja

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Adjunk meg olyan bázist, amelyben ez négyzetösszeg lesz és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot! Mi a kvadratikus alak jellege? Adjunk meg egy bilineáris függvényt, amelyhez ez a kvadratikus alak tartozik!

2. Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 6 \\ x - 3y &= 3 \\ 2x \qquad &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszer QR-felbontását Gram–Schmidt-eljárással, majd a minimális abszolút értékű optimális megoldását!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix teljes és redukált SVD-felbontását! A felbontásból olvassuk le a mátrix egy poláris felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Legyenek egy 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: 2, 3. Az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix hatványainak rangja legyen 5, 3, 2, az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ mátrix hatványainak rangja legyen 6, 5. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

5. A karakterisztikus polinom felírása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixnak 2 valós sajátértéke van! A számegyenes mely tartományába esnek a sajátértékek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját. Adjunk meg egy Jordan-bázist, valamint a Jordan-láncokat! Számítsuk ki $e^{2\mathbf{A}}$-t!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

differenciálegyenlet-rendszer egy alaprendszerét! Stabilis-e az $\mathbf{x} = 0$ megoldás?

8. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb n-edfokú, valós egyváltozós polinomok $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}_n[x]$ vektortere izomorf $\mathbb{R}^{n+1}$-gyel! Definiáljunk $\mathbb{R}_n[x]$-en egy olyan valós skaláris szorzatot, melyre $1, x, \ldots x^n$ ortonormált bázis lesz! Mi lesz két polinom skaláris szorzata ekkor?