

1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A, A + B, AB, AC, AC + 2C, A^{-1}D, D^2, BC, CB.$$

Számítsuk ki  $A$ ,  $CB$  és  $CB + A$  determinánsát is.

3. Keressünk olyan  $n \times n$ -es  $A, B, C$  valós mátrixokat, melyekre:

- $AB = 0$ , és  $BA \neq 0$
- $C^2 = C$ , és  $C \neq 0, I$ .

4. Legyenek  $A, B$  tetszőleges  $n \times n$ -es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az  $AB - BA$  mátrix főátlójában az elemek összege 0.

5. Az  $a$  és  $b$  értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek a valós számok körében? Adjuk is meg a megoldásokat!

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

6. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek

- 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
- 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
- 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
- 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

6. Bizonyítsuk be, hogy testet alkot

- a  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a  $p$  szerinti maradékát vesszük;
- az  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$  halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.

7. Melyek alkotnak vektorteret  $\mathbb{R}$  fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

- $3 \times 3$ -as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
- invertálható  $2 \times 2$ -es valós mátrixok;
- a legfőbb 5-ödfokú valós polinomok;
- a valós számpárok az  $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$  összeadásra és  $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$  skalárral való szorzásra nézve;
- $\mathbb{C}$  a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.

8. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

- az  $\mathbb{R}^2$  sík tükrözése az  $x = 2$  egyenesre;
- $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ahol  $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$ ;
- az a leképezés, amely minden  $\mathbb{R}^2$ -beli vektorhoz a hosszát rendeli;
- a  $2 \times 2$ -es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
- a komplex konjugálás a  $\mathbb{C}$ -n mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortéren;
- egy adott  $a + bi$  komplex számmal való szorzás a  $\mathbb{C}$ -n mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortéren;
- a sík  $\alpha$  szögű elforgatása az origó körül.

9. Legyen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , amelyre  $f(\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$  a 2. feladat  $C$  és  $B$  mátrixával. Határozzuk meg  $f$  képterét és magterét.

**Hf1.** Számítsuk ki az  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát és inverzét.

**Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy az  $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  halmaz testet alkot a valós összeadásra és szorzásra nézve.