1. Legyen A egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?
a) $(5, 6, \ldots)$, b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, c) $(10, 9, 8, \ldots)$, d) $(8, 5, \ldots)$.

2. a) Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázisának elemeit rendre a megadott $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi.
b) Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;

3. Mibe viszi az $xy + z = 0$ felületet az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

4. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.
a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós polinomok tere, és $f(p(x)) = xp'(x) - p(x)$ a V egy lineáris transzformációja. Határozzuk meg f rangját, magterét, képterét, sajátértékeit és sajátvektorait.

6. Melyek igazak egy V vektortér minden f lineáris transzformációjára?
a) $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek
b) $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek
c) 0 sajátértéke f^2-nek $\Rightarrow$ 0 sajátértéke f-nek
d) μ^2 sajátértéke f^2-nek $\Rightarrow$ μ vagy $-\mu$ sajátértéke f-nek.

7. Mi lehet az A mátrix Jordan-féle normálalakja, ha a következőket tudjuk a $k_A(x)$ karakterisztikus polinomjáról, az $m_A(x)$ minimálpolinomjáról, és a V_λ sajátaltérről?
a) $k_A(x) = (x-5)^5$, $m_A(x) = (x-5)^3$, $\dim V_5 = 2$;
b) $k_A(x) = x^2(x-3)^3$, $m_A(x) = x(x-3)$
c) $k_A(x) = x(x+1)(x-1)$

8. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

9. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát!

10. Bizonyítsuk be, hogy egy valós négyzetes A mátrix akkor és csak akkor ortogonális (azaz $A^{-1} = A^T$), ha az oszlopvektorok ortonormált rendszert alkotnak (illetve, ha a sorok ortonormált rendszert alkotnak).

11. Önadjungáltak, unitérek-e az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ és az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ komplex mátrixok?

12. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixú valós bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét! Alkalmas bázisban írjuk a kvadratikus alakot négyzetösszeg alakba.

13. Határozzuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját, J-t, és az A^{100}, e^J, e^{3A} mátixokat, ha
a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Hf1. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Hf2. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, és számítsuk ki az A^{100} mátrixot.