1. *Milyen értéke lehet egy olyan 3×3-as determinánsnak, amelynek minden eleme 0 vagy 1?*

Megoldás: A Sarrus-szabály szerinti kifejtésben három tag 0 vagy 1, három pedig 0 vagy -1, így a determináns értéke csak -3 és 3 közötti egész szám lehet. Ha valamelyik szám előfordul determinánsként, akkor a negatívja is (sorcserével kaphatunk olyan determinánsú mátrixot). 0 és 1 determinánst ad a 0, illetve I mátrix. $2 = 2 - 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. A 3 csak $(1+1+1) - (0+0+0)$ alakban állhatna elő, de akkor az első három miatt a mátrix minden eleme 1, és annak a mátrixnak 0 a determinánsa. Tehát a determináns lehetséges értékei: $0, \pm 1, \pm 2$.

2. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5 \cdot |A^{-1}| = \dfrac{2^5}{|A|} = \dfrac{32}{3}$,

$|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{2^5 \cdot 3} = \dfrac{1}{96}$,

$|A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}| = |A|^2 \cdot |A| \cdot \dfrac{1}{|A|} = |A|^2 = 9.$

3. *Határozzuk meg annak a mátrixnak a determinánsát, amelynek a főátlójában csupa 1 van, mellékátlójának többi eleme mind 2, és a mátrix minden más eleme 0.*

Megoldás: Az $1., 2., \dots, [\frac{n}{2}]$-edik sor kétszeresét kivonva az n-edik, $(n-1)$-edik,..., illetve az $n + 1 - [\frac{n}{2}]$-edik sorból felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek átlójában $1, 1, \dots, 1, -3, \dots, -3$ áll ($[\frac{n}{2}]$ darab (-3)-as), így a determináns $(-3)^{[\frac{n}{2}]}$ (ld. 4.a)).

4. *a) Mutassuk meg, hogy egy felső háromszögmátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata.*
b) Lássuk be, hogy felső háromszögmátrixok szorzata is felső háromszögmátrix, diagonálisaké pedig diagonális.
c) Mikor invertálható egy felső háromszögmátrix, illetve egy diagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az inverzük is ilyen alakú.

Megoldás: a) A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. 1×1-esre nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $n \times n$-esre is igaz, és legyen A egy $(n+1) \times (n+1)$-es felső háromszögmátrix $d_1, \dots, d_{n+1}$ diagonális elemekkel. Az alsó sor szerint kifejtve $|A| = d_{n+1} \cdot |B|$, ahol B az utolsó sor és oszlop elhagyásával kapott részmátrix, és mivel ez is felső háromszögmátrix, az indukciós feltevés miatt $|A| = d_{n+1} d_n \cdots d_1$.

b) A felső háromszögmátrix, ha $a_{ij} = 0$ minden $i > j$-re. Ha B is felső háromszögmátrix, és $C = AB$, akkor $i > j$-re $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, ahol $k \le j$ esetén $k < i$, így $a_{ik} = 0$, $k > j$ esetén pedig $b_{kj} = 0$, tehát $c_{ij} = 0$. Ugyanígy igaz, hogy alsó háromszögmátrixok szorzata alsó háromszög mátrix (vagy a $C^T = (AB)^T = B^T A^T$-ra alkalmazzuk az előzőt), és egy mátrix akkor és csak akkor diagonális, ha alsó és felső háromszögmátrix egyszerre, tehát diagonális mátrixok szorzata is diagonális.

c) Mivel $\det A = d_1 \cdots d_n$, ahol $d_1, \dots, d_n$ a diagonális elemek, A akkor és csak akkor invertálható, ha a diagonális elemei között nincs 0. Ha A invertálható felső háromszögmátrix, és $BA = I$, de B nem felső háromszögmátrix, azaz van olyan $i > j$ (legyen j minimális ilyen az adott i-hez), amelyre $b_{ij} \ne 0$, akkor a szorzat (i, j) indexű eleme $\sum b_{it} a_{tj} = b_{ij} a_{jj} \ne 0$, ugyanis $t < j$-re a j minimalitása miatt $b_{it} = 0$, $t > j$-re pedig $a_{tj} = 0$, mert A felső háromszögmátrix. De ez ellentmond annak, hogy $BA = I$. A diagonális mátrix inverzét egyszerűen meg is adhatjuk: az a diagonális mátrix, amelynek átlójában az eredeti diagonális elemek reciprokai állnak.

5. *Adjuk meg y értékét a Cramer-szabály segítségével, ha $3x - y + z = 0$, $x + 2y - z = 2$, $x - y + 2z = 5$.*

Megoldás: Az egyenletrendszer mátrixa $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, amelynek determinánsa 9, és az y-hoz tartozó módosított mátrix $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, amelynek determinánsa 30, így $y = \dfrac{30}{9} = \dfrac{10}{3}$.

6. *Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok?*

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n$
b) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1$
c) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1$

Megoldás: a) Igen: $x_1\mathbf{v}_1 + x_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\ldots+x_n(\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ esetén $(x_1+\ldots+x_n)\mathbf{v}_1 + (x_2+\ldots+x_n)\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, és $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ függetlensége miatt ebből $x_1+\ldots+x_n = x_2+\ldots+x_n = \ldots = x_n = 0$, tehát $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_1 = 0$.
b) Nem: $1\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) - 1\cdot(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3)+\ldots+(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$.
c) Ha n páros, akkor összefüggők: $1\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) - 1\cdot(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+\ldots-1\cdot(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, de páratlan n-re függetlenek: ha az $x_1,\ldots,x_n$ együtthatóval vett lineáris kombinációjuk $\mathbf{0}$, akkor $x_1+x_n = x_1+x_2 = \ldots = x_{n-1}+x_n = 0$, és ezt megoldva azt kapjuk, hogy $x_1 = \ldots = x_n = 0$.
De megválaszolhatjuk a kérdéseket annak a ténynek a segítségével is, hogy egy n elemű halmaz egy n-dimenziós vektortérben akkor és csak akkor független (és ekkor bázist is alkot), ha a koordinátavektorokból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0 (ld. a 8. feladatot). Az a) esetben a kapott mátrix egy 1 determinánsú felső háromszögmátrix, a b) eset mátrixának determinánsa az első sor szerint kifejtve $1\cdot 1^{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-1} = 1-1 = 0$ (a két nemnulla elemhez tartozó részmátrix háromszögmátrix), a c) esetben pedig a determináns $1\cdot 1 + (-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 1$, amely 0, ha n páros, és 2, ha n páratlan.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ vektorok közül $\mathbf{v}_1$ az egyetlen, amelyik előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{v}_1 = x_2\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n$. Ha $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, akkor valamelyik x_i nem nulla, és ekkor $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 - \frac{x_2}{x_i}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\mathbf{v}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\mathbf{v}_{i+1} - \ldots - \frac{x_n}{x_i}\mathbf{v}_n$, ami ellentmond a feltevésnek.

8. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben n vektor akkor és csak akkor alkot bázist, ha az n vektorból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0.*

Megoldás: Egy n dimenziós vektortérben egy n elemű $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor bázis, ha lineárisan független, vagyis ha az $x_1\mathbf{v}_1+\ldots+x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, azaz a $[\mathbf{v}_1|\ldots|\mathbf{v}_n]\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van. Ha $|A| = 0$, akkor a redukált lépcsős alakjának a determinánsa is 0, tehát nem lehet mind az n oszlopban vezéregyes, és így van nemtriviális megoldás. Ha $|A| \neq 0$, akkor a redukált lépcsős alak determinánsa sem 0, ezért nem lehet benne 0 sor, és így n vezéregyese van, következésképpen az egyenletrendszernek nincs más megoldása, mint a $\mathbf{0}$.

9. *Válasszunk ki maximális lineárisan független rendszert a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorok közül, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!*

Megoldás: Tekintsük a vektorokból mint oszlopokból alkotott mátrixot, és hozzuk redukált lépcsős alakra.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az elemi sorműveletek változatlanul hagyják az oszlopok közötti lineáris összefüggéseket ($x_1\mathbf{v}_1+\ldots+x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\mathbf{v}_1|\ldots|\mathbf{v}_n]\mathbf{x} = \mathbf{0}$, és az elemi sorműveletek invertálható mátrixokkal való balszorzások). Mivel a redukált lépcsős alak vezéregyest tartalmazó oszlopai nyilvánvalóan bázist alkotnak a redukált mátrix oszlopterében, és könnyen leolvasható a többi oszlop előállítása is, az eredeti mátrixban a megfelelő helyen álló oszlopok ugyanúgy bázist adnak az eredeti mátrix oszlopterében, és ugyanazok a lineáris kombinációk állítják elő a többi oszlopot. Így ($\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_4$-nek nevezve a négy vektort) a $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ bázisa lesz az oszloptérnek (és így maximális független rendszer az oszlopok között), és $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$. Valóban, $(2,4,-2,0) = 2\cdot(1,2,-1,0)$, és $(1,0,3,-2) = 2\cdot(2,3,0,-1) - 3\cdot(1,2,-1,0)$.

10. *Adjuk meg a az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:*
a) *az $x-2y+z=0$ síkra való merőleges vetítés, standard bázis;*
b) $f:(x,y,z)\mapsto(2x-y+z, x+z, y-3z)$*; standard bázis, illetve* $\{(1,1,0),(0,1,0),(2,1,1)\}$*;*
c) *a sík tükrözése az $y=2x$ egyenesre; standard bázis, illetve* $\{(1,2),(-2,1)\}$.

Megoldás: a) Az (a,b,c) ponton átmenő, az $x-2y+z=0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x,y,x) = (a,b,c)+t(1,-2,1) = (a+t, b-2t, c+t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a+t)-2(b-2t)+(c+t)=0$ egyenletből kapható $t=-\frac{1}{6}a+\frac{2}{6}b-\frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a+\frac{2}{6}b-\frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a+\frac{2}{6}b+\frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a+\frac{2}{6}b+\frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a+\frac{2}{6}b-\frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a+\frac{2}{6}b+\frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a+\frac{2}{6}b+\frac{5}{6}c \end{bmatrix}$ leképezést megvalósító mátrix $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$.

b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}=\{\,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\,\}$ standard bázisban $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. A $\mathcal{B}_1=\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\,\}=\{(1,1,0),(0,1,0),(2,1,1)\}$ bázisban az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) =& (1,1,1) = -\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_2) =& (-1,0,1) = -3\mathbf{c}_1+2\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_3) =& (4,3,-2) = 8\mathbf{c}_1-3\mathbf{c}_2-2\mathbf{c}_3 \end{aligned}$$

összefüggésből $C=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (a mátrix oszlopai a báziselemek képének koordinátavektorai).

A C mátrix kiszámítható a $C=P^{-1}AP$ képletből is, ahol P az új bázisba való áttérés mátrixa: oszlopai az új báziselemeknek a régi bázis szerinti koordinátavektorai, azaz $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Érdemes először a $\mathcal{B}_1=\{(1,2),(-2,1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1=(1,2)$ és $\mathbf{c}_2=(-2,1)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) =& \mathbf{c}_1 = 1\cdot\mathbf{c}_1+0\cdot\mathbf{c}_2 \\ f(\mathbf{c}_2) =& -\mathbf{c}_2 = 0\cdot\mathbf{c}_1+(-1)\cdot\mathbf{c}_2 \end{aligned},$$

tehát f mátrixa $\mathcal{B}_1$ szerint $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Most az A standard mátrixra a $C=P^{-1}AP$, azaz $A=PCP^{-1}$ összefüggést használva, ahol $P=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, azt kapjuk, hogy $A=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

11. *Mennyi az* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ *mátrix rangja?*

Megoldás: A rang megegyezik a lépcsős alakban a nem nulla sorok számával.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát a mátrix rangja 2.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy a* 3×3*-as valós felső háromszögmátrixok vektorteret alkotnak a szorzásra nézve! Adjuk meg ennek a vektortérnek egy bázisát!*

Hf2. *Adjuk meg az* $(1,1,1)$ *irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés mátrixát a standard bázisban!*