1. *Legyen A egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?*

a) $(5, 6, \dots)$, *b)* $(9, 8, 7, \dots, 4, 4 \dots)$, *c)* $(10, 9, 8, \dots)$, *d)* $(8, 5, \dots)$.

Megoldás: Az A rangja megegyezik képterének dimenziójával, az A^i rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.

a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.

b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.

c) Ha A rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \dots$ sorozat kezdődik.

d) Ha A rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

2. *a) Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázisának elemeit rendre a megadott $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi.*

b) Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;

(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;

(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;

Megoldás: *a)* Az $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \mapsto x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$ leképezés mátrixszorzat alakja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

b) Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $A\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az A mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $AW = V$ mátrixegyenlet, ahol A az ismeretlen, és W illetve V a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^T A^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2r & -1 + r & r \\ -2s & -1 - s & s \\ 1 - 2t & -t & t \end{bmatrix}$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3. *Mibe viszi az $xy + z = 0$ felületet az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*?*

Megoldás: Az (x, y, z) képe $(x', y', z') = (x, x+y, z)$, amiből $(x, y, z) = (x', y' - x', z')$, így az $xy + z = 0$ formulába való helyettesítés után kapjuk, hogy a felület egyenlete $x'y' - x'^2 + z' = 0$.

4. *Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás: A karakterisztikus polinom az $\det(A - \lambda I)$, ennek gyökei a sajátértékek, a homogén lineáris $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak (mint minden homogén lineáris egyenletrendszeréi), ezeket nevezzük sajátaltérnek, ezek vektorai (kivéve a nullvektort) a sajátvektorok. Általában e sajátaltereket egy bázisukkal adjuk meg.

a) A karakterisztikus polinom $(1 - \lambda)^2$, sajátérték az 1, amihez tartozó sajátalteret a $(0, 1)$ vektor feszíti ki.

b) A karakterisztikus polinom $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, sajátértékek: 3, -1, a hozzájuk tartozó sajátaltereket az $(1, 1)$, illetve az $(1, -1)$ vektorok feszítik ki.

c) A mátrixot átírjuk $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ alakba, karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - \sqrt{3} + 1$, aminek a valósok fölött nincs gyöke, tehát nincs sajátértéke és sajátvektora sem (ezt láthatjuk onnan is, hogy a mátrix a 30°-os forgatás mátrixa, és e forgatás egyetlen vektort sem visz a konstansszorosába). Ha a mátrixot $\mathbb{C}$ fölöttinek tekintjük, akkor sajátértékei $\sqrt{3}/2 + i/2$ és $\sqrt{3}/2 - i/2$, a hozzájuk tartozó sajátaltereket az $(i, 1)$ és a $(-i, 1)$ vektorok feszítik ki (ezek is $\mathbb{C}$ fölötti alterek).

d) A karakterisztikus polinom $(\lambda - 1)^2\lambda$, tehát a sajátértékek 1, 1, 0. A sajátalterek meghatározásához $\lambda = 1$ esetén oldjuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 0$ esetén a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ együtthatómátrixú egyenletrendszereket. Az előbbi esetben az egyenletrendszer az egyetlen egyenletből álló $x+y+z = 0$ egyenlettel ekvivalens, ennek összes megoldása $z = t$, $y = s$, $x = -t-s$, azaz vektoralakban: $(x, y, z) = (-1, 1, 0)s + (-1, 0, 1)t$. Ez az altér kétdimenziós, melyet a $(-1, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítenek ki. A 0 sajátérték esetére adott egyenletrendszer elemi sorműveletekkel való átalakítás után az $x + y = 0$, $y - z = 0$ egyenletrendszerre vezet, melynek megoldása $z = t$, $y = t$, $x = -t$, vektoralakban: $(x, y, z) = t(-1, 1, 1)$. Ezt az egydimenziós alteret a $(-1, 1, 1)$ vektor feszíti ki.

5. *Legyen V a legfeljebb másodfokú valós polinomok tere, és $f(p(x)) = xp'(x) - p(x)$ a V egy lineáris transzformációja. Határozzuk meg f rangját, magterét, képterét, sajátértékeit és sajátvektorait.*

Megoldás: Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$, Ekkor $f(p(x) = x(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = ax^2 - c$. A $p \leftrightarrow (a, b, c)$ izomorfizmus a V és $\mathbb{R}^3$ között. Az f-hez tartozó mátrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ennek rangja 2, magtere megegyezik az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásainak terével, az $x = 0$, $-z = 0$ egyenletrendszer összes megoldása pedig $t(0, 1, 0)$. Képtere megegyezik a bázisvektorok képei által kifeszített térrel: $s(1, 0, 0) + t(0, 0, -1)$. Sajátértékei 1, 0, -1, a hozzájuk tartozó sajátaltereket rendre az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektorok feszítik ki. Ezeket visszafordítva a polinomok nyelvére: az f rangja 2, magterébe a bx alakú polinomok, képterébe az $ax^2 - c$ (vagy írhatjuk azt is, hogy az $ax^2 + c$) alakú polinomok tartoznak. f sajátértékei, mint fönt, a hozzájuk tartozó sajátaltereket rendre az x^2, az x, illetve az 1 polinom feszíti ki.

6. *Melyek igazak egy V vektortér minden f lineáris transzformációjára?*
a) $\mathbf{v}$ *sajátvektora* f*-nek* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora* f^2*-nek*
b) $\mathbf{v}$ *sajátvektora* f^2*-nek* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora* f*-nek*
c) 0 *sajátértéke* f^2*-nek* $\Rightarrow$ 0 *sajátértéke* f*-nek*
d) μ^2 *sajátértéke* f^2*-nek* $\Rightarrow$ μ *vagy* $-\mu$ *sajátértéke* f*-nek.*

Megoldás:
a) $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
b) Hamis, például ha f a sík 90°-os elforgatása, akkor f^2 a 180°-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
c) Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.
d) Igaz. Legyen J a Jordan-féle normálalakja f-nek. Ennek főátlójában vannak f sajátértékei, f^2 sajátértékei pedig J^2-ben, ahol a J főátlóbeli elemeinek négyzetei szerepelnek.

7. *Mi lehet az A mátrix Jordan-féle normálalakja, ha a következőket tudjuk a $k_A(x)$ karakterisztikus polinomjáról, az $m_A(x)$ minimálpolinomjáról, és a V_λ sajátaltérről?*
a) $k_A(x) = (x-5)^5$, $m_A(x) = (x-5)^3$, $\dim V_5 = 2$;
b) $k_A(x) = x^2(x-3)^3$, $m_A(x) = x(x-3)$
c) $k_A(x) = x(x+1)(x-1)$

Megoldás: a) Az A 5×5-ös, $(x-5)^3$ kitevője 3, ezért a legnagyobb Jordan-blokk 3×3-as, és $\dim V_5 = 2$, ezért 2 Jordan-blokk van, így a második 2×2-es.

b) Az A 5×5-ös, a minimálpolinomban minden kitevő 1, így minden Jordan-blokk 1×1-es.

c) Az A 3×3-as, a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal, minden Jordan-blokk 1×1-es. Így a három Jordan-mátrix:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.*

Megoldás: (első) Egy Jordan-blokk transzponáltját kapjuk, ha balról és jobbról is szorozzuk azzal az S mátrixszal, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák vannak. Mivel $S^{-1} = S$, ezért minden Jordan-blokk hasonló a transzponáltjához. Ebből következik, hogy minden Jordan-féle normálalakú mátrix hasonló a transzponáltjához, amiből következik az állítás.

Megoldás: (második) Egy mátrixnak és transzponáltjának ugyanazok az aldeterminánsai, így a determinánsosztói is (hisz az A mátrix i-edik determinánsosztója az $A - \lambda I$ összes $i\times i$-es aldeterminánsának legnagyobb közös osztója). Ennek következtében azonosak az invariáns faktoraik is, és így a Jordan-féle normálalakjuk is.

9. *Számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrix n-edik hatványát!*

Megoldás: E mátrix karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + \lambda - 2$, így sajátértékei $1, -2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1,1)$ és $(1,-2)$. A sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrixot jelölje C, a sajátértékekből álló diagonális mátrixot D. Köztük fennáll az $A = CDC^{-1}$ összefüggés. Ebből adódik, hogy $A^n = CD^nC^{-1}$, így – kihasználva, hogy diagonális mátrix n-edik hatványa megkapható az átlóbeli elemek n-edik hatványozásával – kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^n = CD^nC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 2 - (-2)^n & 1 + (-2)^n \end{bmatrix}$$

10. *Bizonyítsuk be, hogy egy valós négyzetes A mátrix akkor és csak akkor ortogonális (azaz $A^{-1} = A^T$), ha az oszlopvektorok ortonormált rendszert alkotnak (illetve, ha a sorok ortonormált rendszert alkotnak).*

Megoldás: Az állítás közvetlenül következik a definícióból, hisz ha $A^{-1} = A^T$, akkor $A^TA = I$, vagyis A oszlopvektorainak skaláris szorzatai épp akkor adnak 1-et, ha egy vektort saját magával szorzunk, egyébként 0-t. Az $AA^T = I$ pedig azt mutatja, hogy a sorvektorok is ortonormált rendszert alkotnak.

11. *Önadjungáltak, unitérek-e az* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ *és az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *komplex mátrixok?*

Megoldás: E mátrixok adjungáltja (transzponáltjuk konjugáltja): $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, inverze $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Így csak a második mátrix önadjungált ($A^* = A$), és egyik sem unitér ($A^* = A^{-1}$).

12. *Határozzuk meg az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *mátrixú valós bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét! Alkalmas bázisban írjuk a kvadratikus alakot négyzetösszeg alakba.*

Megoldás: A bilineáris alak $\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$, a hozzá tartozó kvadratikus alak $\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, azaz mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix}$. Ennek jellegét kétféleképp is meghatározzuk: sajátértékei $\lambda_{1,2} = (5\pm\sqrt{34})/2$, ezek közül az egyik pozitív, a másik negatív, tehát a mátrix indefinit. A másik megoldás: a bal felső sarokaldeterminánsok (főminorok) értéke 1 és $4 - 25/4 = -9/4$, azaz egyike pozitív, másika negatív tehát indefinit. A kvadratikus alak négyzetösszeg alakja: $(5+\sqrt{34})/2 \cdot x^2 + (5-\sqrt{34})/2 \cdot y^2$.

13. *Határozzuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját, J-t, és az A^{100}, e^J, e^{3A} mátixokat, valamint A determinánsosztóit és invariáns faktorait, ha*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) Ennek a mátrixnak már meghatároztuk a sajátértékeit és sajátvektorait a 4*d)* feladatban: az 1 sajátértékhez tartozik a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$, míg a 0 sajátértékhez a $(-1,1,1)$ sajátvektor. E vektorok lineárisan függetlenek, a belőlük alkotott bázisban a mátrix diagonális alakot ölt, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Az eredeti és a diagonális mátrix hasonló, a hasonlóság C mátrixa a sajátvektorokból áll. Ez és ennek inverze:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így tehát

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy ha az f hatványsor konvergenciatartományának belsejében tartalmazza az A mátrix spektrumát, és $A = CJC^{-1}$, ahol J az A Jordan-féle normálalakja, akkor $f(A) = Cf(J)C^{-1}$. Itt $f(J)$ úgy kapható meg, hogy J minden Jordan-blokkjára alkalmazzuk az f függvényt. Mivel e feladatban minden Jordan-blokk 1×1-es, hisz a normálalak diagonális, ezért csak a főátló elemeire kell alkalmazni f-et. Eszerint

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az eredmény meglepő, de ha csak A^2-et kiszámoltuk volna, láthattuk volna, hogy $A^n = A$ minden pozitív egész n-re. Bár ezt az eredményt az e^{3A} kiszámításánál is fölhasználhatnánk, kövessük a fent vázolt utat:

$$e^J = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{3J} = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és az utóbbi mátrixot felhasználva

$$e^{3A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3J} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^3-1 & e^3-1 & e^3-1 \\ 1-e^3 & 1 & 1-e^3 \\ 1-e^3 & 1-e^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A determinánsosztók és az invariáns faktorok: $D_3(\lambda) = (\lambda-1)^2\lambda$ a karakterisztikus polinom, $E_3(\lambda) = (\lambda-1)\lambda$ a minimálpolinom (minden tényező első kitevőn van, mert a maximális blokkméret 1. $D_2(\lambda) = (\lambda-1)$, $E_2(\lambda) = (\lambda-1)$, $D_1(\lambda) = D_0 = 1$, $E_0(\lambda) = 1$.

b) Először meghatározzuk a sajátértékeket a hagyományos módon, azaz a karakterisztikus polinommal (az első sort levonjuk a többi sorból, majd az összes oszlopot hozzáadjuk az első oszlophoz):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

A karakterisztikus polinom 1 főegyütthatóval felírva: $(n-\lambda)\lambda^{n-1}$, tehát az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátérték.

A csupa 1-esből álló $n \times n$-es U mátrix egyik sajátvektora a csupa 1-esből álló vektor, hisz $U \cdot (1,1,\dots,1) = (n,n,\dots,n)$, és a hozzá tartozó sajátérték n. Másrészt J minden vektort $(k,k,\dots,k)$ alakú vektorba visz, azaz a képtér 1-dimenziós, így a magtér $(n-1)$-dimenziós. Eszerint a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér $(n-1)$-dimenziós, így kiválasztható a sajátvektorok közül egy ortonormált rendszer. A sajátvektorokból, mint oszlopokból képzett mátrix legyen C, ennek első oszlopa legyen az egységnyi $(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mivel C ortogonális, ezért inverze C^T. A normálalak egyet kivéve minden eleme 0, ezért a C mátrixnak csak egyetlen sora befolyásolja az eredményt. Tehát

$$U^{100} = CJ^{100}C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^{100} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? \end{bmatrix} = n^{99}U$$

Hasonlóképp általában $U^m = n^{m-1}U$. Az e^J bal felső sarkában e^n áll, főátlójában 1-esek, egyebütt 0. Az e^{3J} hasonló, csak ott a sarokban e^{3n} áll. Ebből az e^{3A} már az előzőkhöz hasonlóan kapható meg, ha e^{3J}-t felbontjuk egy $K+I$ összegre.

A determinánsosztók és az invariáns faktorok: $D_n(\lambda) = (\lambda-n)\lambda^{n-1}$ a karakterisztikus polinom, $E_n(\lambda) = (\lambda-n)\lambda$ a minimálpolinom. $D_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-2}$, $E_{n-1}(\lambda) = \lambda$, $D_{n-2}(\lambda) = \lambda^{n-3}$, $E_{n-2}(\lambda) = \lambda$,… $D_2(\lambda) = \lambda$, $E_2(\lambda) = \lambda$, $D_1(\lambda) = D_0 = 1$, $E_0(\lambda) = 1$.

c) E mátrix háromszög alakú, így főátlójából leolvasható a karakterisztikus polinom: $(\lambda-2)^2(\lambda+5)$. A lehetséges minimálpolinomok $(\lambda-2)(\lambda+5)$ vagy $(\lambda-2)^2(\lambda+5)$. Pontosabban a legkisebb fokú ezek közül, melybe a mátrixot helyettesítve a zérusmátrixot kapjuk. Ráadásul a második polinomba nem is kell behelyettesíteni, mert a Caley–Hamilton-tétel szerint az biztosan a nullmátrix lesz. Miután az első polinom nem annullálja a mátrixot, hisz $(A-2I)(A+5I) = \begin{bmatrix} 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$, a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal. Eszerint a 2-höz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete 2 (mert ennyi $(\lambda-2)$ kitevője, ezért a Jordan-mátrix alakja $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. A 2-höz tartozó sajátvektor $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7,0,1)$. Keresünk egy harmadik bázisvektort, jelölje (x,y,z). Ekkor a $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -9/7 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra igaz, hogy $A = BJB^{-1}$, azaz $AB = BJ$. Ebből a B-ben lévő ismeretlenekre megoldható egyenletrendszert kapunk, egy megoldás: $x = z = 0$, $y = 1/3$, ennek inverze $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$J^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^J = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix}, \quad e^{3J} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $A^{100} = BJ^{100}B^{-1}$ és $e^{3A} = Be^{3J}B^{-1}$ felhasználásával

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{3A} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

A determinánsosztók és az invariáns faktorok: $D_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$ a karakterisztikus polinom, $E_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$ a minimálpolinom. $D_2(\lambda) = D_1(\lambda) = D_0 = 1$, $E_2(\lambda) = E_0(\lambda) = 1$.

d) Na jó, megcsinálom ezt is! Először is A^{100} könnyen számolható, hisz néhány hatványozás után látszik, hogy $A^3 = I$, így $A^{99} = I$, tehát $A^{100} = A$. De a további kérdésekhez nem kerülhetjük el a karakterisztikus egyenlet meghatározását, ami $-\lambda^3 + 1 = 0$, azaz $\lambda^3 = 1$, aminek a harmadik egységgyökök a megoldásai, azaz az $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ jelöléssel a három sajátérték: $\varepsilon^0 = 1$, ε és $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, az áttérés C mátrixa és a C^{-1} mátrix:

$$1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon : \begin{bmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2 : \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{így } C = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ és } C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a számolásokban kihasználhatjuk, hogy $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$. Mivel J diagonális mátrix, konkrétan $J = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, így azonnal adódik, hogy $J^{100} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, hisz $\varepsilon^{100} = \varepsilon$. Innen is kijön, csak bonyolultan, hogy $A^{100} = CJ^{100}C^{-1} = A$. Hasonlóképp $e^J = \operatorname{diag}(e, e^\varepsilon, e^{\varepsilon^2})$ és $e^{3J} = \operatorname{diag}(e^3, e^{3\varepsilon}, e^{3\varepsilon^2}) = \operatorname{diag}(e^3, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Innen $e^{3A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, ahol $a = e^3 + 2e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $b = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $c = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Hf1. *Határozzuk meg az* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!*

Hf2. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *mátrix Jordan-féle normálalakját, és számítsuk ki az* A^{100} *mátrixot.*