

1. Hozzuk kanonikus alakra a $8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$ másodrendű görbe egyenletét, és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben.

Megoldás: A görbe egyenletét mátrixszorzat alakra, azaz $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} + c = 0$ alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [6 \quad -2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0.$$

Az A mátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{s}_1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $\mathbf{s}_2 = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$, így az áttérés mátrixa $Q = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, amellyel $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$, a diagonális mátrix $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Így

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' = 9x'^2 - y'^2, \quad \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{K} Q \mathbf{x}' = [6 \quad -2] \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -2\sqrt{10}y'.$$

A $9x'^2 - y'^2 - 2\sqrt{10}y' + 1 = 0$ alakban egy teljes négyzetté alakítást végzünk: $9x'^2 - (y' + \sqrt{10})^2 + 11 = 0$, ahonnan az $x'' = x'$, $y'' = y' + \sqrt{10}$ helyettesítés után az $(y'')^2 - (x'')^2 = 11$ alakot kapjuk. Ez egy hiperbola. Ennek középpontja a kétvesszős koordinátarendszer origójában, az egyvesszős $(0, -\sqrt{10})$ pontjában és az eredeti $Q \cdot (0, -\sqrt{10}) = (3, -1)$ pontjában van. A hiperbola tengelyeit a sajátvektorok irányjai adják.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha W_1, W_2 a V véges dimenziós vektortér két altere, akkor $\dim \langle W_1, W_2 \rangle = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Megoldás: A $W_1 \cap W_2$ tetszőleges \mathcal{C} bázisát a W_1 és a W_2 bázisává is kiegészíthetjük: legyen W_1 bázisa $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_1$, W_2 -é pedig $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_2$. Belátjuk, hogy $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ bázisa a $\langle W_1, W_2 \rangle$ alternek. $\mathcal{D} \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq \langle W_1, W_2 \rangle$, továbbá $\langle \mathcal{D} \rangle$ nyilván tartalmazza W_1 -et és W_2 -t, így $\langle W_1, W_2 \rangle$ -t is. Tehát $\langle \mathcal{D} \rangle = \langle W_1, W_2 \rangle$. Ha \mathcal{D} nem lenne lineárisan független, akkor létezne az elemeinek egy $\mathbf{0}$ -t adó nem triviális lineáris kombinációja, és az $\mathbf{c} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ alakba vonható össze, ahol $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}_i$, és valamelyik (következésképpen legalább kettő) vektor nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{c} - \mathbf{b}_2 \in W_2$, és így $\mathbf{b}_1 \in W_1 \cap W_2$, holott a \mathcal{B}_1 választása miatt $\mathcal{B}_1 \cap W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Hasonlóan ellentmondásra jutunk, ha $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$. Tehát \mathcal{D} lineárisan független generátorrendszer, így bázis is. Mivel $\dim W_i = |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}_i|$, $\dim \langle W_1, W_2 \rangle = |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim W_1 + \dim W_2 - |\mathcal{C}| = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$.

3. Lássuk be, hogy alterek uniója nem feltétlenül altér.

Megoldás: Valójában két olyan altér uniója, amelyek egyike sem tartalmazza a másikat, soha nem lehet altér, mert ha V_1 és V_2 ilyen alterek, és $\mathbf{v}_1 \in V_1 \setminus V_2$ és $\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus V_1$, akkor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_1$ esetén $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \in V_1$ lenne, ami ellentmond \mathbf{v}_2 választásának, és ugyanígy nem lehet $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_2$ sem, tehát az unió nem tartalmazza a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ vektort, holott a \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 vektorokat tartalmazza. Egymást nem tartalmazó alterekre pedig példa lehet egy legalább két dimenziós vektortér két független vektora által generált két egyszemélyes altér.

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlóak:

$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } a, b, c \text{ és } d \text{ tetszőleges nem } 0 \text{ értékek;} \\ b) & \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } a, b, c \text{ és } d \text{ tetszőleges nem } 0 \text{ értékek;} \\ c) & \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } a \neq c \text{ tetszőleges, egymástól különböző értékek;} \end{aligned}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: a) Mindegyik mátrixnak x^2 a karakterisztikus polinomja, tehát a Jordan-normálalakjuk csak a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ vagy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ lehet. De az első mátrixnak minden konjugáltja is a nulla

mátrix, tehát a felsorolt négy mátrix mindegyik a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz hasonló, és így egymáshoz is hasonlók.

b) Ugyanaz a helyzet, mint az a) részben, csak itt $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a lehetséges Jordan-normálalakok, és az első mátrix szintén mindennel felcserélhető (általában a $\lambda \cdot I$ skalár-mátrixokra is igaz ez), tehát csak önmagával konjugált, így a második Jordan-mátrixhoz hasonló mind a négy mátrix

c) Az első mátrix sajátértékei a és c különböző számok, így Jordan-normálalakja csak a diagonális mátrix lehet, éppen a másodikként megadott mátrix.

d) Itt is a második mátrix az elsőnek a Jordan-normálalakja. Ebben az esetben még az 0-hoz tartozó sajátérték dimenzióját is ellenőrizni kell, de könnyű kiszámolni, hogy ez kétdimenziós, tehát a Jordan-normálalak diagonális, 3, 0, 0 átlóelemekkel.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha A önadjungált és M unitér mátrix, akkor $M^{-1}AM$ önadjungált mátrix.

Megoldás: Mivel $A^* = A$ és $M^* = M^{-1}$, ezért $(M^{-1}AM)^* = M^*A^*(M^{-1})^* = M^{-1}AM$, azaz $M^{-1}AM$ valóban önadjungált mátrix.

6. Bizonyítsuk be, hogy ortogonális mátrixok szorzata, inverze szintén ortogonális.

Megoldás: Ha $A^T = A^{-1}$ és $B^T = B^{-1}$, akkor $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, tehát AB is ortogonális. Továbbá $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

7. Adjunk meg ortogonális, illetve ortonormált bázist az \mathbb{R}^4 $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$ és $(1, -1, 1, -1)$ vektorok által generált alterében.

Megoldás: Legyen $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1, -1)$. Ekkor a következőképpen állítunk elő belőle egy $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ ortogonális bázist a generált alterben: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$, \mathbf{c}_2 egy $\mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_2\mathbf{c}_1/|\mathbf{c}_1|^2)\mathbf{c}_1 = (2, 1, 0, 1) - \frac{4}{6}(1, 2, -1, 0) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ -vel párhuzamos vektor, mondjuk, $\mathbf{c}_2 = (4, -1, 2, 3)$, \mathbf{c}_3 pedig a $\mathbf{b}_3 - (\mathbf{b}_3\mathbf{c}_1/|\mathbf{c}_1|^2)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{b}_3\mathbf{c}_2/|\mathbf{c}_2|^2)\mathbf{c}_2 = (1, -1, 1, -1) - \frac{-2}{6}(1, 2, -1, 0) - \frac{4}{30}(4, -1, 2, 3) = (1, -1, 1, -1) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0) - (\frac{8}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$ vektorból $\mathbf{c}_3 = (4, -1, 2, -7)$. Tehát $\{(1, 2, -1, 0), (4, -1, 2, 3), (4, -1, 2, -7)\}$ egy ortogonális bázisa a generált alternek, és ezeket a vektorokat lenormálva ortonormált bázist kapunk: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(4, -1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{70}}(4, -1, 2, -7)\}$.

8. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix QR -felbontását Gram-Schmidt-ortogonalizálás segítségével.

Megoldás: Az A mátrix oszlopoait ortogonalizáljuk a Gram-Schmidt-módszerrel, és a kapott ortonormált bázis elemei mint oszlopvektorok alkotják a Q ortogonális mátrixot, míg $Q^{-1}A = Q^T A = R$ felső háromszögmátrix lesz, és ezzel $A = QR$. A 7. feladatban ismertetett módon az $\{(1, 0, 2), (3, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ bázisból az $\{(1, 0, 2), (2, 1, -1), (-2, 5, 1)\}$ ortogonális, majd a $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1)\}$ ortonormált bázist kapjuk, így

$$Q = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & 5 \\ 2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = Q^T A = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5\sqrt{6} & 5\sqrt{6} & -2\sqrt{6} \\ 0 & 6\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{és ezzel } A = QR.$$

9. a) Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix általánosított inverzét.

b) Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ legjobban közelítő megoldását, ha $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) Az A mátrixot először előállítjuk CD alakban, ahol C oszlopai az A oszlopainak egy maximális független részhalmazát adják, D oszlopai pedig azt írják le, hogy A oszlopai a C oszlopainak mely lineáris kombinációi (így C és D rangja is megegyezik A rangjával, és $C^T C$ és DD^T invertálható mátrixok). Ezeket általában legkönnyebben a redukált lépcsős alakból olvashatjuk le: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, és C az A mátrixnak azon oszlopaiból áll, amelyekhez tartozó oszlopai a lépcsős alaknak tartalmaznak vezéregyest, D pedig a redukált lépcsős alak vezéregyest tartalmazó soraiból áll össze. Ebben az egyszerű esetben persze közvetlenül is leolvashatjuk, hogy $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $D = [0 \ 1]$, tehát $C^T C = [2]$ és $DD^T = [1]$, és ebből az általánosított inverz:

$$A^{\|^{-1}} = D^T (DD^T)^{-1} (C^T C)^{-1} C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \left[\frac{1}{2} \right] [1 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) A $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorra az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása. A \mathbf{b} -hez legközelebbi olyan \mathbf{b}_1 vektor, amire van megoldás (a "legközelebbi" azt jelenti, hogy $|\mathbf{b} - \mathbf{b}_1|$ minimális) $AA^{\|^{-1}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, és $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ egyik megoldása $A^{\|^{-1}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, de az összes megoldását is megkapjuk az egyenletrendszer megoldásával: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ -ből $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megjegyzés: \mathbf{b}_1 -et geometriai úton is megtalálhatjuk: ez a mátrix oszlopterének a \mathbf{b} -hez legközelebbi vektora, azaz a \mathbf{b} merőleges vetülete az oszloptérre. Ebben az esetben az $y = x$ egyenesre kell levetíteni a $(3, 1)$ vektort, és az eredmény $((3, 1)(1, 1) / |(1, 1)|^2)(1, 1) = 2(1, 1) = (2, 2)$.

Hf1. a) Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixú bilineáris függvény definittségét.

b) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben ennek a bilineáris függvénynek a mátrixa diagonális, és írjuk fel ebben a bázisban a hozzá tartozó kvadratikus alakot!

Hf2. Adjuk meg az $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix

a) karakterisztikus és minimálpolinomját,

b) determinánsosztóit és invariáns faktorait,

c) Jordan-féle normálalakját,

d) az $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!