1. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását a Householder-módszerrel.*

Megoldás: Először az első oszlopot hozzuk a felső háromszögmátrixban szükséges alakra egy tükrözéssel. A vektor hossza 3, így az $[1\ 2\ 2]^T$ vektort a $[3\ 0\ 0]^T$ vektorba akarjuk képezni. Ezt a különbségvektorra, $[2\ -2\ -2]^T$ merőleges síkra való tükrözéssel csináljuk (az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{n} = [1\ -1\ -1]^T$ normálvektort használjuk a tükrözés mátrixának képletében):

$$Q_1 = I - \frac{2}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\text{és } Q_1A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezután Q_1A második oszlopát kell megváltoztatnunk: de elég csak az alsó két elemét, tehát olyan blokkdiagonális mátrixot alkalmazunk, amelynek jobb alsó 2×2-es blokkja a $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektort $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorba képező tükrözés, Q_2', a bal felső blokk pedig egy 1×1-es egységmátrix. Q_2' az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ normálvektorú egyenesre való tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^2$-ben, az előbbi képlet szerint

$$Q_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1\quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ és } Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R \quad\Rightarrow\quad A = (Q_2Q_1)^{-1}R = (Q_2Q_1)^TR,$$

ahol $Q = (Q_2Q_1)^T = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrix.

2. *Írjuk fel az* $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix szinguláris érték szerinti felbontását, és általánosított inverzét!*

Megoldás: $M^TM = \begin{bmatrix} 225 & 300 & 0 \\ 300 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$, ennek karakterisztikus egyenlete $(25-\lambda)(\lambda^2 - 625\lambda) = 0$, amiből azonnal adódik, hogy a sajátértékek 625, 25 és 0, a szinguláris értékek 25 és 5 és a rang 2. Az M^TM első két sajátértékéhez tartozó egységnyi sajátvektorok $(3/5, 4/5, 0)$, $(0,0,1)$. Mivel ortonormált rendszert alkotnak, ezért ezek a $V_2\Sigma_2U_2^T$ felbontás szerinti U_2 mátrix oszlopai, és ezek képe az M mátrixszal való szorzás után $(0, 20, 0, -15)$ és $(3, 0, 4, 0)$, amiket normálva kapjuk $(0, 4/5, 0, -3/5)$ és $(3/5, 0, 4/5, 0)$ vektorokat, melyek a V_2 oszlopai. Így a szinguláris felbontás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az általánosított inverz

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{625} & 0 & -\frac{9}{625} \\ 0 & \frac{16}{625} & 0 & -\frac{12}{625} \\ \frac{3}{25} & 0 & \frac{4}{25} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{625}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & -9 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \\ 75 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}$$

A teljesség kedvéért megadjuk a teljes SVD-t is. Ehhez ki kell egészítenünk az U_2, illetve V_2 oszlopai alkotta vektorrendszereket az $\mathbf{R}^3$, illetve $\mathbf{R}^4$ tér teljes bázisává, a bázis vektoraiból alkotott mátrix lesz U és V. Az U esetén a bázis harmadik vektora a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektor lesz. A V esetén szabadon választhatunk, könnyen találunk megfelelő vektorokat. Végül megfelelő számú zérussorral és zérusoszloppal kell Σ_2-t kiegészíteni:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -12 & 0 \end{bmatrix} = V\Sigma U^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

3. *Határozzuk meg az* $M\mathbf{x} = (5, 100, 15, -75)$ *egyenletrendszer legkisebb négyzetes hibát adó, legkisebb normájú megoldását az előző feladatbeli* M *együtthatómátrixszal. A közelítő megoldás mely* $\mathbf{b}$ *vektor esetén lenne pontos megoldás?*

Megoldás: Az első és a harmadik egyenlet $3z = 5$, $4z = 15$ nyilvánvalóan ellentmondó, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A kért megoldást az $\bar{\mathbf{x}} = M^{\|-1\|}\mathbf{b}$ vektor adja, azaz

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{625} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & -9 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \\ 75 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 100 \\ 15 \\ -75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Az $M\bar{\mathbf{x}} = (9, 100, 12, -75)$ az a vektor, melyre az egyenletrendszer megoldható lenne.

4. *Írjuk fel az* $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ *mátrix poláris felbontását, és adjunk a felbontásnak geometriai reprezentációt!*

Megoldás: Az A^TA sajátértékei 16, 4, sajátvektorai $(0, 1)$, $(1, 0)$, szinguláris értékei $\sigma_1 = 4$ és $\sigma_2 = 2$, így $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, a sajátvektorok A-val való szorzatának σ_i-edrésze adja a V oszlopvektorait: $V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. A poláris felbontás a szingulárisból adódik: $A = V\Sigma U^T = (V\Sigma V^T)(VU^T) = PQ$, így esetünkben:

$$P = V\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = VU^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Q tükrözés az x-tengellyel 67.5°-os szöget bezáró egyenesre, míg P a V oszlopai alkotta bázisban a V első oszlopának irányában 4-szeresére nyújt, míg második oszlopának irányában 2-szeresére.