2008. október 21. 10.15
Munkaidő 60 perc
Minden példa 4 pont
A csoport

Haladó lineáris algebra zárthelyi

1. *Adjuk meg az* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix*

a) karakterisztikus és minimálpolinomját
b) determinánsosztóit és invariáns faktorait
c) Jordan-féle normálalakját
d) az $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *diffegyenlet rendszer általános megoldását!*

Megoldás: a) Az A karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$, ami megegyezik minimálpolinomjával, mert minden tényező az első hatványon van. *b)* $D_2 = E_2 = \lambda^2 - 2\lambda$, $D_1 = E_1 = 1$. *c)* $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *d)* A sajátvektorok: $(1, 1)$ és $(-1, 1)$, így $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, így

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix}$$

Az e^{At} kiszámolható Hermite-féle interpolációval is. 2-ben és 0-ban: $p(2) = e^{2t}$, $p(0) = 1$, ahol $p(x) = ax + b$, amiből $b = 1$ és $a = \frac{e^{2t}-1}{2}$. Így

$$e^{At} = p(A) = \frac{e^{2t} - 1}{2}A + I = \frac{e^{2t} - 1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. *a) Számítsuk ki a* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix általánosított inverzét!*

b) Számítsuk ki a legjobban közelítő megoldásait az $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *egyenletrendszernek, ha* $\mathbf{c} = [1, 2]^T$.

Megoldás: a) C a B független oszlopainak mátrixa, D a redukált lépcsős alak nemzérus sorainak mátrixa, ekkor $B = CD$, másrészt $B^{\|-1\|} = D^T(DD^T)(C^TC)^{-1}C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1][\frac{1}{2}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

a) második megoldás: általánosított inverzzel. $B^TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, ennek sajátértékei 2, 0, sajátvektorai $(0, 1)$, $(1, 0)$, ezek mátrixa U, szinguláris értékei $\sqrt{2}$, 0, az ezekből képzett diagonális mátrix Σ. A B rangja 1, így az első sajátvektor B-képe $B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, amit normálva kapjuk a $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ vektort. Így a Lánczos-féle SVD felbontás, és abból az általánosított inverz:

$$B = V_1\Sigma_1U_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}[\sqrt{2}]\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B^{\|-1\|} = U_1\Sigma_1^{-1}V_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Ha ismerjük a $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ együtthatómátrixának általánosított inverzét, a legjobban közelítő megoldásait a $B\mathbf{x} = BB^{\|-1\|}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszer megoldása adja. Esetünkben ez a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszerre vezet, melynek összes megoldása $\mathbf{x} = (t, \frac{3}{2})$. E megoldások közül a minimális abszolút értékűt az $\mathbf{x} = B^{\|-1\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ képlettel számolhatjuk: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

3. *a) Rajzoljuk fel az 1.-beli A mátrix Gersgorin köreit!*
b) Jelöljük be a sajátértékeket és határozzuk meg a spektrálsugarát!
c) Határozzuk meg A euklideszi normáját!
d) Határozzuk meg A spektrális normáját!

Megoldás: *a)* A Gersgorin-körök közepe 1, sugara 1. *b)* A sajátértékek 0, 2, így a spektrálsugár $\max_i |\lambda_i| = 2$. *c)* $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$, *d)* $AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, sajátértékei 0, 4, így szinguláris értékeinek maximuma 2.

4. *a) Adjunk meg egy bilineáris függvényt, melynek mátrixa a 1.-beli A mátrix. Határozzuk meg a definitségét!*
b) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben a bilineáris függvény mátrixa diagonális, és írjuk fel ebben a bázisban a hozzá tartozó kvadratikus alakot!

Megoldás: *a)* Egy bilineáris függvény az A együtthatómátrixszal: $[\,x_1 \quad x_2\,]\, A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$. Az A sajátértékei 0, 2, így pozitív szemidefinit. *b)* Ortonormált bázist kapunk a sajátvektorok normálásával: a $\lambda = 2$ és $\lambda = 0$ értékekhez tartozó sajátvektorok $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, így az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, mellyel $P^TAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, és a kvadratikus alak $[\,x' \quad y'\,] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2(x')^2$.

5. *Egy páros Γ gráfban minden pontból 3 él jön ki.*
a) Mutassuk meg, hogy a gráf illeszkedési mátrixának $1/3$-szorosa duplán sztochasztikus mátrix.
b) Mondjuk ki Birkhoff tételét!
c) Mutassuk meg, hogy van a Γ gráfban teljes párosítás!