2008. október 21. 10.15
Munkaidő 60 perc
Minden példa 4 pont
B csoport

Haladó lineáris algebra zárthelyi megoldások

1. *Adjuk meg az* $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix*

a) *karakterisztikus és minimálpolinomját*
b) *determinánsosztóit és invariáns faktorait*
c) *Jordan-féle normálalakját*
d) *az* $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *diffegyenlet rendszer általános megoldását!*

Megoldás: *a)* Az A karakterisztikus egyenlete $(1-\lambda)^2 = 0$, ami megegyezik a minimálpolinommal, mert $I - A \neq O$, így a minimálpolinom nem lehet $1 - \lambda$.

b) $D_2 = E_2 = (1-\lambda)^2$, $D_1 = E_1 = 1$.

c) $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{y} = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, és ehhez az e^{At} mátrixfüggvény értékét kell kiszámolni.

1. megoldás: Hermite-féle interpolációval: Mivel A minimálpolinomja $(x-1)^2$, az e^{At} mátrixot megkaphatjuk $p(A)$ alakban, ahol a $p(x)$ polinomra és az $f(x) = e^{tx}$ függvényre $p(1) = f(1)$ és $p'(1) = f'(1)$. Létezik ilyen legfeljebb elsőfokú polinom, azaz $p(x) = ax + b$. Erre $p(1) = a + b = e^t$, $p'(1) = a = te^t$, amiből $a = te^t$ és $b = e^t - te^t$. Így

$$e^{At} = p(A) = te^{2t}A + (e^t - te^t)I = te^t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^t - te^t)I = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

2. megoldás Jordan-normálalakból: Ha $J = P^{-1}AP$, ahol $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ az A Jordan-normálalakja, akkor $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1}$. Tehát meg kell határozni azt a bázist, amelyben az A lineáris transzformáció mátrixa J, és ennek elemei alkotják az áttérés mátrixának, P-nek az oszlopait. Ha $P^{-1}AP = J$, akkor $P^{-1}(A-I)P = J - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, azaz az új $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisra $(A-I)\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ és $(A-I)\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$. Ennek megkereséséhez elég olyan $\mathbf{b}_2$ vektort találni, amelyre $(A-I)^2\mathbf{b}_2 = 0$, de $(A-I)\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$. Mivel az $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldástere az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ által generált altér, $(A-I)^2$ pedig a 0 mátrix, $\mathbf{b}_2$-nek $\mathbb{R} \setminus \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ bármely eleme megfelel, például $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, és akkor $\mathbf{b}_1 = (A-I)\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tehát $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és ebből e^{At} kiszámítható.

2. *a)* *Rajzoljuk fel az 1.-beli A mátrix Gersgorin köreit!*
b) *Jelöljük be a sajátértékeket és határozzuk meg a spektrálsugarat!*
c) *Határozzuk meg A euklideszi normáját!*
d) *Határozzuk meg A spektrális normáját!*

Megoldás: *a)* A két Gersgorin kör mindegyikének 1 a középpontja, az egyiknek 2, a másiknak 0 a sugara. *b)* A spektrálsugár $\rho(A) = \sqrt{\max_i |\lambda_i|} = 1$. *c)* Az euklideszi vagy Frobenius-norma $\sqrt{\sum |a_{ij}|^2} = \sqrt{6}$. *d)* $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i}$, ahol λ_i az A^TA sajátértéke. $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, sajátértékei $3 \pm 2\sqrt{2}$, így a spektrális norma $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

3. *Számítsuk ki a* $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix szinguláris értékek szerinti felbontását!*

Megoldás: A $B^T B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: 2 és 0, a hozzájuk tartozó normált sajátvektorok $\mathbf{u}_1 = (0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0)$. A szinguláris értékek $\mu_1 = \sqrt{2}$ és $\mu_2 = 0$. Mivel B és vele együtt a $B^T B$ szorzat rangja $r = 1$, ezért csak az $\mathbf{v}_1$ vektort kapjuk meg a $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\mu_i} B\mathbf{u}_i$ képlettel, azaz $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\mu_1} B\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{v}_2$ vektort úgy választjuk, hogy $\mathbf{v}_1$-gyel ortonormált bázist alkosson: legyen $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Ha U jelöli a $\mathbf{u}_i$, V az $\mathbf{v}_i$ vektorok mátrixát a szinguláris értékek csökkenő nagyságrendjének megfelelően, és U_1, illetve V_1 jelöli ezek első $r = 1$ oszlopát, akkor a B mátrix $B = V\Sigma U^T$ szinguláris érték szerinti teljes felbontása, a Lánczos-féle $B = V_r \Sigma U_r^T$ felbontás, és a vele lényegében azonos $B = \mu_1 \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{u}_1 + \ldots + \mu_r \mathbf{v}_r \circ \mathbf{u}_r = \mu_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T + \ldots + \mu_r \mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^T$ diadikus felbontás alakjai:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = V\Sigma U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = V_1 \Sigma U_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} [\,\sqrt{2}\,] [\,0 \quad 1\,], \qquad B = \mu_1 \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{u}_1 = \mu_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} [\,0 \quad 1\,].$$

4. *a) Írjuk fel a* $(0,1)$ *és* $(1,0)$ $\mathbf{a}$ *különbségvektorát, valamint az origón átmenő,* $\mathbf{a}$ *normálvektorú egyenesre való tükrözés mátrixát.*

b) Housholder módszerrel bontsuk fel egy ortogonális és egy felső háromszög mátrix szorzatára a $C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixot!*

Megoldás: Az *a)* feladatban az $\mathbf{a} = (0,1) - (1,0) = (-1,1)$ vektorra merőleges egyenesre való tükrözés mátrixa fejben is kiszámolható, hisz ez az $y = x$ egyenesre való tükrözés, ennek mátrixa pedig $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. De számolhatunk a tükröző mátrix általános képletével, az $I - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, vagy az $I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ képletek valamelyikével, ahol $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [\,-1 \quad 1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A *b)* feladatban a megadott mátrix első oszlopát, azaz a $(0,1)$ vektort az $(1,0)$ vektorba szeretnénk transzformálni. Ezt épp az előző mátrix végzi el, tehát $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mivel a tükröző mátrix ortogonális, inverze megegyezik transzponáltjával, így $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ami épp a kívánt felbontás.

5. *Legyen* $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Határozzuk meg, hogy milyen valós x-ekre lesz $F(x)$ *negatív definit mátrix!*

b) Konvex-e az a)-beli halmaz? Válaszát indokolja!

c) Mondjuk ki a konvex függvény definícióját!