Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 1. gyakorlat

1. Legyenek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&-4\end{bmatrix}.$$

Végezd el a következő műveleteket, ha ez lehetséges: $\mathbf{A}+\mathbf{A}$, $3\mathbf{A}^T-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC}+2\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB}$. Határozd meg $\mathbf{A}$, $\mathbf{CB}$ és $\mathbf{CB}+\mathbf{A}$ determinánsát.

2. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det\mathbf{A}=3$. Határozd meg $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát.

3. Mennyi lehet a determinánsa egy olyan 3×3-as mátrixnak, melynek minden eleme 0 vagy 1?

4. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned}x-2y-z&=1\\2x-4y+z&=2\\y+z&=3\end{aligned}\,,\qquad\begin{aligned}2x+2y+5z&=0\\2x-4y+2z&=6\\x\qquad+2z&=7\end{aligned}\,,\qquad\begin{aligned}x+2y-\ z&=\ 2\\-2x-4y+4z&=\ 0.\\x+2y-5z&=-6\end{aligned}$$

5. Legyenek $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times k}$ és $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$. Mutasd meg, hogy ha az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ lineáris egyenleterendszer megoldható és $\mathbf{x}_1\in\mathbb{R}^k$ egy megoldása, akkor ugyanennek az egyenletnek az összes megoldását $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ alakban kapjuk, ahol $\mathbf{x}_0$ az $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ ($\in\mathbb{R}^n$) homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása.

6. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Add is meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned}2x+\ y+\ z&=\ 4\\x+2y-\ z&=-1\\x-\ y+2z&=\ a\\x+by+\ z&=\ 3\end{aligned}$$

7. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

8. Add meg a követkző mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\-3&2\end{bmatrix},\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-3&2&6\\-6&4&8\\-2&1&4\end{bmatrix},\quad\mathbf{D}=\begin{bmatrix}4&0&-7\\0&2&-2\\2&0&-4\end{bmatrix}.$$

9. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a követkző vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $\dots$, $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\dots+\mathbf{v}_n$
b) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$, $\dots$, $\mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1$
c) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$, $\dots$, $\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1$

10. Bizonyítsd be, hogy ha a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$.

11. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adj meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsd elő a többit ezek lineáris kombinációjaként.

12. Add meg y értékét a Carmer-szabály segítségével, ha $3x-y+z=0$, $x+2y-z=2$, $x-y+2z=5$, majd határozd meg az együtthatómátrix inverzében a második sor harmadik elemét!

HF. Mennyi az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\2&-2&1&-1\\0&4&-1&5\end{bmatrix}$$

mátrix rangja? Válassz ki a sor-, illetve oszlopvektorok közül egy olyan vektorrendszert, mely a sor-, illetve oszloptér egy bázisa, majd írd fel a mátrix további sorainak (oszlopainak) koordinátás alakját ebben a bázisban. Írd fel az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix bázisfelbontását, azaz írd fel $\mathbf{A}=\mathbf{BR}$ alakba, ahol $\mathbf{R}_{r\times n}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, és $\mathbf{B}_{m\times r}$ az $\mathbf{A}$ megfelelően választott oszlopaiból áll.