

1. Egyenletrendszer megoldásának felírása blokkmátrixokkal
Tegyük fel, hogy az r rangú \mathbf{A} mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlop-cserékkel mindig elérhető. Jelölje \mathbf{B}_r az \mathbf{A} első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ahol \mathbf{d}_r egy r -dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és \mathbf{t}_s a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

2. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{A} és \mathbf{D} invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol \mathbf{B} tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha \mathbf{A} és \mathbf{D} négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7, 3, 3), (8, 1, 2), (4, 4, 3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3, 2, 1)$ vektor \mathcal{C} bázisbeli alakját!

4. Legyen \mathbf{A} egy 10×10 -es valós mátrix. Jelölje r_i az \mathbf{A}^i rangját. Lehet-e az (r_1, r_2, \dots) sorozat egyenlő az alábbiakkal? (a) $(5, 6, \dots)$, (b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$, (c) $(10, 9, 8, \dots)$, (d) $(8, 5, \dots)$.

5. Legyen $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, -3)$. Határozzuk meg az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ leképezés kép- és magterét!

6. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt \mathbb{R}^3 -ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és

- (i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
 - (ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
 - (iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
- Írjuk fel e leképezés mátrixát!

7. Mibe viszi az $xy + z = 0$ felületet az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

8. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

- (a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
- (b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
- (c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
- (d) \mathbb{R}^n vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
- (e) \mathbb{R}^n vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
- (f) \mathbb{R}^n tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

9. Határozzuk meg a \mathbf{P} és \mathbf{R} mátrixok LU-felbontását, majd ezt felhasználva

- 1. oldjuk meg a $\mathbf{P}\mathbf{x} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert,
- 2. invertáljuk az \mathbf{R} mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. A Gram-Schmidt-ortogonalizációval keressünk ortogonális és ortonormált bázist

- (a) \mathbb{R}^3 -ben a $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ bázisból kiindulva,
- (b) \mathbb{R}^4 -nek a $(0, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, -1)$ vektorok által kifeszített alterében.

HF. Az LU-felbontásnak több változatát használják.

- 1. Az egyik az LDU-felbontás, ahol az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U}$ szorzatban \mathbf{D} diagonális mátrix, továbbá \mathbf{L} és \mathbf{U} főátlójában is csupa 1-es szerepel. Megmutatható, hogy ha \mathbf{A} -nak van LU-felbontása, akkor az LDU-felbontás egyértelmű. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LDU-felbontását!

- 2. A másik fontos változat a PLU-felbontás. Ezt akkor használjuk, ha az elimináció megakad, vagy azért, mert a következő oszlop első eleme 0, vagy mert numerikus okokból másik elemmel szeretnénk eliminálni, így egy sorcserére lenne szükség. E sorcseréket előre végrehajtva, az \mathbf{A} olyan alakra hozható, melynek már van LU-felbontása. A sorcserék megvalósíthatók egy \mathbf{P} permutációs mátrixszal való szorzással is (a permutációs mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, a többi 0). Ekkor tehát $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását, és igazoljuk, hogy ha \mathbf{P} permutációs mátrix, akkor $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$.