Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 5. gyakorlat

1. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ 0 sajátértéke f-nek;
4. μ^2 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ μ vagy $-\mu$ sajátértéke f-nek.

2. Legyen d_i az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

3. Legyen $n > 1$ és legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában minden elem a, a többi elem $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $a - b$ sajátérték $(n-1)$-szeres, az $a + (n-1)b$ pedig 1-szeres geometriai multiplicitású. Határozzuk meg Jordan-mátrixát, és azt a $\mathbf{P}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-bázisát:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

HF. Konstruáljunk olyan egészelemű 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek legföljebb két eleme 0, és amelynek egyetlen sajátértéke és két független sajátvektora van, majd (mintha nem tudnánk róla semmit), határozzuk meg Jordan-bázisát, és számítsuk ki 10-edik hatványát és az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!