Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) — 6. gyakorlat

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:
1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

3. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$\textit{(a)} \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad \textit{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(d)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!

6. Határozzuk meg az 4.*(d)*-beli mátrix polárfelbontását!

7. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4, -2, -2, 0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

8. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását.

HF. Mutassuk meg, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ az $\mathbb{R}^m$ merőleges vetítése az $\mathbf{A}$ oszlopterére. (Útmutatás: használjuk a redukált felbontást!)