4.5. Diagonalizálhatóság

Mind bizonyos problémák megértésében, mind a gyakorlati alkalmazásokban fontos lehet, hogy egy lineáris leképezés mátrixát milyen bázisban írjuk fel. Láttuk milyen sokat segít, ha a bázis sajátvektorokból áll, sőt, ha még ortonormált is. Ekkor a mátrix diagonális alakot ölt. Kérdés azonban, milyen mátrixok diagonalizálhatók, és amelyek nem, azokkal mit tudunk kezdeni.

Ortogonálisan és unitéren diagonalizálható mátrixok

Schur-felbontás

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk Tekintsük a 4.58. példában szereplő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix hatását a standard bázis vektorain:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix fenti hatását a következő diagrammal fogjuk szemléltetni:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és mint a 4.58. példában láttuk, $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs. Viszont az előző egyenletekből a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Az ilyen vektorokra külön elnevezést fogunk alkalmazni:

4.71. definíció: Általánosított sajátvektor. Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó *általánosított sajátvektorának* nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot *Jordan-láncnak* nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Az előzőekben vizsgált konkrét példában tehát a térnek sajátvektorokból álló bázisa nincs, hisz a sajátaltér csak 1-dimenziós, de általánosított sajátvektorokból álló bázisa van.

4.72. PÉLDA: JORDAN-LÁNC KONSTRUKCIÓJA. Keressünk az alábbi mátrixok minden sajátaltérének minden bázisvektorához egy abban végződő Jordan-láncot:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&-1&-3\\-1&5&2\\2&-1&1\end{bmatrix}\text{ és a }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\-1&0&5\end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom mindkét mátrix esetén $-\lambda^3+12\lambda^2-48\lambda+64=(4-\lambda)^3$, ezért $\lambda=4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátérték.

Az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1=(1,-1,1)$ vektor feszít ki.

Mivel $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3=\mathbf{O}$, ezért legföljebb három hosszú sorozatra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_3$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_3=\mathbf{x}_2$. Ez két egyenletrendszer megoldását jelenti. Elég a megoldások közül egyet kiválasztani:

$$\mathbf{A}-4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&-1&-3\\-1&1&2\\2&-1&-3\end{bmatrix},\quad\text{egy-egy megoldás:}\quad\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

Ezek a következő láncot adják:

$$\mathbf{0}\xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}}\mathbf{x}_1=(1,-1,1)\xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}}\mathbf{x}_2=(0,-1,0)\xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}}\mathbf{x}_3=(-1,-2,0)$$

A $\mathbf{B}$ mátrix esetén a sajátaltér 2-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1=(1,0,1)$ és az $\mathbf{y}_1(0,1,0)$ vektorok feszítenek ki.

Mivel $(\mathbf{B}-4\mathbf{I})^2=\mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{y}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{B}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{B}-4\mathbf{I})\mathbf{y}_2=\mathbf{y}_1$. Ezek közül az első megoldható, és megoldásainak egyike $(-1,0,0)$, míg a második nem oldható meg. Ez két láncra vezet:

$$\mathbf{0}\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}}\mathbf{x}_1=(1,0,1)\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}}\mathbf{x}_2=(-1,0,0)$$
$$\mathbf{0}\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}}\mathbf{y}_1=(0,1,0)$$

Az egyik lánc kettő hosszú, a másik egy hosszú. ■

A bevezetőben mutatott mátrix-típus fontos szerepet játszik a továbbiakban:

4.73. DEFINÍCIÓ: JORDAN-BLOKK. Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, azaz melynek alakja

$$\mathbf{J}_\lambda=\begin{bmatrix}\lambda&1&0&\dots&0&0\\0&\lambda&1&\dots&0&0\\0&0&\lambda&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&\lambda&1\\0&0&0&\dots&0&\lambda\end{bmatrix}\tag{4.7}$$

Jordan-blokknak nevezzük.

A fentiek mintájára könnyen látható, hogy az ilyen mátrixoknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, tehát kimondható a következő megállapítás: minden Jordan-blokknak van általánosított sajátvektorokból álló bázisa.

4.74. PÉLDA: JORDAN-LÁNCHOZ TARTOZÓ JORDAN-BLOKK. Írjuk fel a 4.72. példában szereplő $\mathbf{A}$ mátrixot az ott konstruált Jordan-lánc vektoraiból álló bázisban!

Megoldás. Mivel $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$ és $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, ezért az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban a leképezés mátrixa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ezt az eredményt az áttérés $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3]$ mátrixával való közvetlen számolással is megkaphatjuk, ha elvégezzük az alábbi mátrixszorzásokat:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.75. példa: Jordan-láncok és Jordan-blokkok kapcsolata. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak két különböző sajátértéke van, $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$, valamint hogy a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ egy Jordan-bázisát alkotják, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rajzoljuk fel a Jordan-láncok diagrammját, és határozzuk meg a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrixot a szorzások elvégzése nélkül!

Megoldás. A $\mathbf{C}$ oszlopai Jordan-bázist alkotnak, azaz minden oszlopvektor egy Jordan-lánc eleme. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrixnak csak két különböző sajátértéke van, ez azt jelenti, hogy minden oszlopvektort vagy az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ vagy az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix vagy a zérusvektorba, vagy egy másik oszlopvektorba visz (előbbi esetben az oszlopvektor sajátvektor, utóbbi esetben csak általánosított sajátvektor). E hatást az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{C}$ és az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{C}$ szorzatok kiszámításával könnyen megkaphatjuk:

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A}-4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első szorzatból látszik, hogy $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{0}]$, míg a másodikból, hogy $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})[\mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{c}_6\ \mathbf{c}_7] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{0}]$ (a második szorzatban már nem is kellett volna a $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ vektorokkal szorozni látva az előző szorzás eredményét). Ebből fölrajzolható a diagram:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_2 & \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_3 & & \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_4 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_5 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_7 & & \end{array}$$

A diagramból kiolvasható az $\mathbf{A}$ hatása a $\mathbf{c}_i$ vektorokra: $\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_4 = 4\mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_5 = 4\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_6 = 4\mathbf{c}_6 + \mathbf{c}_5$,

$\mathbf{Ac}_7 = 4\mathbf{c}_7$. Ebből felírható e leképezés mátrixa:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \left[\begin{array}{cc|c|cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Jordan normálalak Nem hozható minden mátrix diagonális alakra, de egy ahhoz közeli alakra – ahogy azt a 4.75. példa mutatja – igen. Ebben csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek nemnulla elemek, és azok is csak 1-esek. Ráadásul az új bázis ismeretében ez az alak jól leírja a mátrixleképezés hatását is.

4.76. Tétel: Jordan normálalak. Bármely $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz. Részletesen megfogalmazva: minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ mátrix alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

► A tételbeli (4.8) mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan-féle normálalakjának* nevezzük.
► A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de mivel több sajátvektor is tartozhat ugyanahhoz a sajátértékhez, ezért egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha találunk k független sajátvektort, akkor találunk k Jordan-láncot is, melyek vektorai a tér bázisát adják, és ebben a bázisban a leképezés mátrixa a tételbeli Jordan-alakot ölti.

A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n-nél kisebb méretű mátrixra.

Legyen λ az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke, és legyen $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásainak terét, vagyis a λ-hoz tartozó sajátalteret jelölje $\mathcal{N}_\lambda$. Ennek dimenzióját, vagyis $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nullitását jelölje r.

Mivel $r > 0$, ezért a dimenziótétel miatt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ oszlopterének dimenziója $n - r < n$. Jelölje az oszlopteret $\mathcal{O}_\lambda$. Az $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altere $\mathbf{A}$-nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$, ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{Av})$ ugyancsak eleme $\mathcal{O}_\lambda$-nak. Az $\mathbf{A}$ mátrixleképezést szűkítsük le $\mathcal{O}_\lambda$-ra, jelölje ennek mátrixát $\hat{\mathbf{A}}$.

Az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix $n - r$ méretű, ezért az indukciós feltevés szerint van Jordan-láncokból álló bázisa. A következő diagram e láncokat szemlélteti, és azt, hogy $\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}$ hogy hat rajtuk. Mivel azonban e halmazon ez megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatásával, a nyilak fölé is ezt írjuk:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}$$

Itt az $\mathbf{x}_k^j$ vektor felső indexe a lánc sorszámát jelöli.

Az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ oszloptere és magtere metszetének dimenzióját jelölje q, azaz legyen $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$. Mivel $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai, azok $\mathcal{O}_\lambda$-ba eső báziselemei pedig az $\mathbf{x}_1^j$ vektorok, ezért q közülük a λ sajátvektora, azaz q sajátérték megegyezik λ-val, pl. az első q, azaz $\lambda_k = \lambda$ $(k = 1, 2, \dots, q)$. A láncok végén lévő $\mathbf{x}_{s_k}^k$ vektorok elemei $\mathcal{O}_\lambda$-nak, tehát mindegyikhez van olyan $\mathbf{y}_k$ vektor, hogy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ $(k = 1, 2, \dots, q)$.

Az $\mathcal{N}_\lambda$ altér r-dimenziós, annak q-dimenziós alteréhez találunk olyan $\mathcal{Z}$ alteret, mely $(r - q)$-dimenziós, és minden vektora sajátvektor. Így a Jordan-láncok így alakulnak:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_q \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & & & &
\end{array} \tag{4.9}$$

Az $\mathbf{x}$-vektorok száma $n-r$, az $\mathbf{y}$-vektorok száma q, a $\mathbf{z}$-vektorok száma $r - q$, ezek összege pedig $(n - r) + q + (r - q) = n$, tehát van elég vektor egy bázishoz. Már csak a függetlenségüket kell belátni. A konstrukció olyan volt, hogy az $\mathbf{x}$- és $\mathbf{z}$-vektorok mind függetlenek egymástól, csak az $\mathbf{y}$-vektorok tőlük való függetlenségét kell bizonyítani. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{j,k} \xi_{j,k}\mathbf{x}_k^j + \sum_t \eta_t\mathbf{y}_t + \sum_r \zeta_r\mathbf{z}_r = \mathbf{0},$$

ahol nem minden η_t nulla. Szorozzuk meg az egyenlőséget (balról) az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ mátrixszal. Mivel az első q lánc végén lévő $\mathbf{x}_{s_t}^t$-vektorok kisebb indexűekbe mennek, másrészt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{s_t}^t$, ezért olyan összefüggéshez jutunk, amelyben már csak $\mathbf{x}$-vektorok lesznek, de nem minden együttható nulla, hisz van nemnulla η együttható, és ez ellentmondás. ■

4.77. PÉLDA: NORMÁLALAKOK. Soroljuk fel az összes lehetséges Jordan normálalakját annak a mátrixnak, melyről csak annyit tudunk, hogy $(1 - \lambda)^4$ a karakterisztikus polinomja. Ne tekintsünk különbözőnek két normálalkot, ha azok csak a Jordan-blokkok sorrendjében különböznek egymástól!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom negyedfokú, így a mátrix 4×4-es. Mivel minden sajátérték 1, ezért a Jordan-alak főátlójában csupa 1-es szerepel. A lehetséges öt alak elemi leszámlálással megkapható:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Nem tekintjük különbözőnek a blokkok cseréjével egymásból megkapható alakokat. Például az

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

mátrix a negyedik alakból a két blokk cseréjével megkapható. ■

A Jordan-alak egyértelműsége A $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrixok a Jordan normálalakjuk szerint osztályokba sorolhatók. Egy osztályba azok a mátrixok kerülnek, melyek normálalakja azonos. Egy ilyen osztályozás azonban csak akkor létezik, ha minden mátrixnak csak egyetlen normálalakja van, azaz a normálalak egyértelmű. Ezt biztosítja a következő tétel.

4.78. Tétel: A Jordan-alak egyértelműsége. Egy mátrix Jordan normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás. A felbontás egyértelműségének bizonyításához elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

Az egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke azonos, jelölje λ. A továbbiak könnyebb megértésére lássunk egy konkrét példát. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^{13}$, és tegyük fel, hogy Jordan-bázisa a következőképp néz ki:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1\\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2\\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array} \tag{4.10}$$

A leghosszabb blokk mérete 4, ami $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ ismeretében úgy kapható meg, hogy 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. Általában is igaz, a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s, melyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. A mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos.

Legyen a λ sajátértékhez tartozó i-hosszú Jordan-láncok száma m_i. A 4.10. diagramon $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$. Látható, hogy $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ hatványainak rangjából megmondható, hogy vektor nem futott még a nullvektorba, innen pedig az m_i értékek is kiszámolhatók. Esetünkben

$$\begin{aligned}
m_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\right) = 2\\
m_3 + 2m_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\right) = 5\\
m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= \mathrm{r}\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right) = 8\\
m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= n - \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 13 - 8 = 5
\end{aligned}$$

és ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Általában

$$\begin{aligned}
m_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-1}\right)\\
m_{s-1}+2m_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
m_{s-2}+2m_{s-1}+3m_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
&\vdots\\
m_2+2m_3+\dots+(s-1)m_s &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\\
m_1+m_2+m_3+\dots+m_{s-1}+m_s &= n-\mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a jobb oldalán a hasonlóságra nézve invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú, így egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható, főátlójában csupa egyes van, melynek következtében a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám.

Ha a mátrixnak nem csak egy sajátértéke van, akkor sajátértékenként egy ilyen egyenletrendszert kapunk, mely annyiban változik az előzőhöz képest, hogy ha λ multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $A-\lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjához az összes λ-tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n-m(\lambda)$-t ki kell vonni. A legnagyobb blokk mérete ekkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$-nek az a legkisebb s hatványa, melynek rangja először éri el $n-m(\lambda)$-t. Így az összes esetre általánosan érvényes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
m_s &= m(\lambda)-n+\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-1}\right)\\
m_{s-1}+2m_s &= m(\lambda)-n+\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
m_{s-2}+2m_{s-1}+3m_s &= m(\lambda)-n+\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
&\vdots\\
m_2+2m_3+\dots+(s-1)m_s &= m(\lambda)-n+\mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\\
m_1+m_2+m_3+\dots+m_{s-1}+m_s &= n-\mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})
\end{aligned}$$

Ennek egyértelmű megoldhatósága bizonyítja állításunkat. ■

4.79. példa: Jordan-blokkok mérete. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan normálalakját!

Megoldás. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n-\mathrm{r}(\mathbf{A})=10-5=5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{aligned}
m_4&=1\\
m_3+2m_4&=2\\
m_2+2m_3+3m_4&=5\\
m_1+m_2+m_3+m_4&=5
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
m_4&=1\\
m_3&=0\\
m_2&=2\\
m_1&=2
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\mathbf{J}=\begin{bmatrix}
\lambda&1&&&&&&&&\\
&\lambda&1&&&&&&&\\
&&\lambda&1&&&&&&\\
&&&\lambda&&&&&&\\
&&&&\lambda&1&&&&\\
&&&&&\lambda&&&&\\
&&&&&&\lambda&1&&\\
&&&&&&&\lambda&&\\
&&&&&&&&\lambda&\\
&&&&&&&&&\lambda
\end{bmatrix}$$

4.80. példa: Jordan-blokkok mérete. Egy 14×14-es $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^5(2-\lambda)^5(1-\lambda)^4$.

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre:	12, 11, 10, 9;
$\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre:	12, 10, 9;
$\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre:	11, 10.

Írjuk fel a Jordan normálalakját!

Megoldás. Most $n=14$, $m(3)=5$, $m(2)=5$, $m(1)=4$.

$\lambda = 3$ esetén a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^s) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{aligned} m_4 &= 5 - 14 + 10 = 1 \\ m_3 + 2m_4 &= 5 - 14 + 11 = 2 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= 5 - 14 + 12 = 3 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 14 - 12 = 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_4 &= 1 \\ m_3 &= 0 \\ m_2 &= 0 \\ m_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a többi sajátérték esetén is (gondoljuk végig):

$$\begin{aligned} m_3 &= 5 - 14 + 10 = 1 \\ m_2 + 2m_3 &= 5 - 14 + 12 = 3 \\ m_1 + m_2 + m_3 &= 14 - 12 = 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_3 &= 1 \\ m_2 &= 1 \\ m_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= 4 - 14 + 11 = 1 \\ m_1 + m_2 &= 14 - 11 = 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_2 &= 1 \\ m_1 &= 2 \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
& 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & 3 & & & & & & & & & & \\ \hline
& & & & 3 & & & & & & & & & \\ \hline
& & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
& & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & 2 & & & & & & \\ \hline
& & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
& & & & & & & & & 2 & & & & \\ \hline
& & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
& & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
& & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

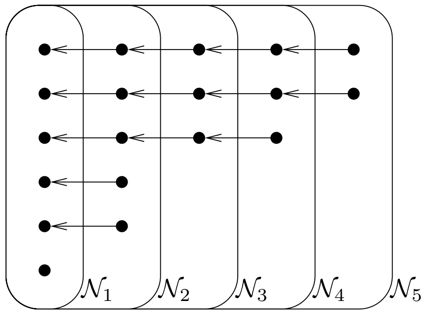
az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja. ■

A Jordan-bázis konstrukciója A Jordan-tétel bizonyításában megkonstruált bázist kis mátrixokra kézzel is ki lehet számolni. Az itt ismertetendő egyszerű naív algoritmus nem számítógépes megvalósításra való, ennél hatékonyabb is létezik.

Példaként tekintsünk egy 18-adrendű $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek λ 18-szoros sajátértéke, és amelyre a Jordan-láncok hossza rendre $m_5 = 2$, $m_4 = 1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $m_1 = 2$. Ennek alapján az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatása a Jordan-bázison meghatározható, amit a 4.9. ábra szemlélt. Jelölje $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterét $\mathcal{N}_k$. $\mathcal{N}_5$ a λ-hoz tartozó teljes általánosított sajátaltér – e példában $\mathbb{C}^{18}$. A nulltér meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ami nem okoz nehézséget, de az már nem teljesen mindegy, hogy a bázist hogy választjuk benne.

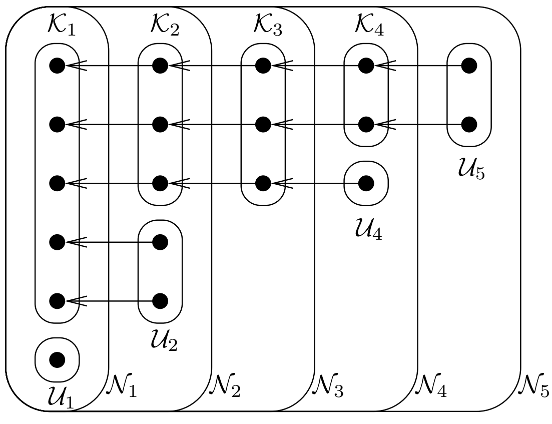
Az algoritmus – melyet a 4.10. ábra is szemléltet – lényege, hogy a nagyobb indexű terek felől indulva minden lépésben kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ bázisát $\mathcal{N}_i$ bázisává, majd a kiterjesztésnek vesszük az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képét, ami már $\mathcal{N}_{i-1}$-be esik, és ezt $\mathcal{N}_{i-2}$ bázisához adva azt kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ új bázisává. ... A konvenció az lesz, hogy a vektortér egy generátorának vektorait egyetlen mátrixba tesszük, és azt azonos, de félkövér betűvel jelöljük, tehát pl. $\mathcal{N}$ generátormátrixát $\mathbf{N}$ jelöli. Részletezve:

- Meghatározzuk $\mathcal{N}_i$ egy tetszőleges $\mathbf{N}_i$ bázismátrixát ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Kiegészítjük $\mathbf{N}_4$-et $\mathcal{N}_5$ bázisává, az új báziselemek mátrixát jelölje $\mathbf{U}_5$, tehát $\mathcal{N}_5$ bázisa most $[\mathbf{N}_4|\mathbf{U}_5]$.



4.9. ábra. Az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ hatványainak nullterei, és hatása az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-bázisán

- Legyen $\mathbf{K}_4$ az új elemek $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ általi képe, azaz $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{U}_5$. Mivel $\mathcal{K}_4 \subset \mathcal{N}_4$, de független az $\mathcal{N}_3$ altértől, ezért alkalmas arra, hogy bázisvektorait a Jordan-bázis $\mathcal{N}_4 \setminus \mathcal{N}_3$-ba eső elemei közé vegyük.
- Ha szükséges, egészítsük ki a $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4]$-et $\mathcal{N}_4$ bázisává új elemek hozzávételével, így $\mathcal{N}_4$ bázisa most $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$.
- Vegyük a $[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$ mátrix képét, azaz legyen $\mathbf{K}_3 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$, és ha szükséges, egészítsük ki $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3]$-at $\mathcal{N}_3$ bázisává új elemek hozzávételével (azaz $\mathcal{N}_3$ bázisa most $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$ – most $\mathcal{U}_3 = \emptyset$). Hasonlóan folytatjuk $\mathcal{N}_i$ indexét csökkentve: $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$, új elemek hozzávételével előállítjuk $\mathcal{N}_2$ bázisát: $[\mathbf{N}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$.
- Végül legyen $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$, amit $\mathbf{U}_1$-gyel kibővítünk $\mathcal{N}_1$ bázisává. A tér Jordan-bázisa a kép- és az új elemek egyesítése:
$$[\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_1|\mathbf{U}_2|\mathbf{U}_3|\mathbf{U}_4|\mathbf{U}_5]\,.$$
- Végül a Jordan-bázis elemeit úgy rendezzük, hogy a láncokat egymás után, minden láncot a sajátvektorból indulva felsorolunk.



4.10. ábra. A Jordan-bázist megkonstruáló algoritmus

Ezek után lássunk egy konkrét példát, majd az algoritmust általánosan. A számolás kivitelezéséhez két megjegyzés:

► Ha $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ két altér, és $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ $(m < n)$ a bázisuk, akkor elemi sorműveletekkel konstruálhatunk $\mathcal{V}$-nek egy olyan $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\}$ bázist, hogy $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa legyen. Ehhez írjuk $\mathcal{U}$, majd $\mathcal{V}$ bázisvektorait egyetlen

$$[\mathbf{u}_1\ \dots\ \mathbf{u}_m \mid \mathbf{v}_1\ \dots\ \mathbf{v}_n]$$

mátrixba. Ennek lépcsős alakjában vezéregyesek lesznek az első m oszlopban, és $n-m$ további oszlopban. A nekik megfelelő vektorok az eredeti bázisokban (tehát $\mathcal{V}$ összes vektora és $\mathcal{U}$-nak $n-m$ vektora) adják az új bázist.

► Emlékeztetünk rá, hogy ha egy mátrix redukált lépcsős alakja $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$ alakú, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{S}\\ -\mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a mátrix nulltere bázisát adják. Vigyázzunk, ha $\mathbf{I}$ nem az első oszlopokban van, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ sorait megfelelően permutálni kell.

4.81. PÉLDA: JORDAN-BÁZIS ELŐÁLLÍTÁSA. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan normálalakját és Jordan-bázisát!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^5 + 4\lambda^4 - 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1-\lambda)^4.$$

A 0-hoz tartozó sajátvektor a redukált lépcsős alakból kiszámítva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel itt az algebrai és geometriai multiplicitás egyaránt 1, ez a Jordan-lánc egyelemű. A $\lambda = 1$ esetén a geometriai multiplicitás 2, ugyanis $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ redukált lépcsős alakja és abból a nulltér bázisa:

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$-t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját. A lépcsős alak kiszámolása ugyanis csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, így

$$(\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$-en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye. Sokkal kevesebb viszont a számolnivaló, mivel a 0-sorok elhagyhatók:

$$\left\{\begin{matrix} (\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))\,(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\ \text{a 0-sorok nélkül} \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan a bázis vektorai:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan határozzuk meg $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3$ bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ami már lépcsős alakú, és ahonnan a bázismátrix

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg $\mathbf{U}_3$ vektorait, vagyis azokat, amelyek $\mathcal{N}_2$ bázisát ($\mathbf{N}_2$-t) $\mathcal{N}_3$ bázisává egészítik ki. Ehhez az $[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni, $\mathcal{U}_3$ elemei a $\mathbf{N}_3$ azon oszlopai lesznek, melyek függetlenek $\mathbf{N}_2$-től, azaz melyek redukált lépcsős alakjában vezéregyes van.

$$[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & \mathbf{-1} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $\mathbf{U}_3 = [-1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$, és ebből $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{U}_3 = [-1\ 3\ 4\ 4\ 0]^T$. Mivel $\mathbf{K}_2$ egyetlen vektorból áll, és $\mathcal{N}_3$ és $\mathcal{N}_2$ dimenzióinak különbsége is 1, ezért itt nem kell számolnunk semmit, $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, azaz $\mathbf{U}_2$ üres. $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{K}_2 = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$, és mivel e vektor benn van $\mathcal{N}_1$ bázisában, $\mathbf{U}_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$ teret a másik bázisvektor generálja. A Jordan normálalak felírásához a Jordan-láncok vektorait egymás után fel kell sorolni, a belőlük képzett $\mathbf{P}$ mátrixszal lesz $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. E két mátrix

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az algoritmus általánosan:

- Input: $\mathbf{A}$, $p(x)$ karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bontva,
- Minden λ sajátértékre
  - Határozzuk meg a leghosszabb lánc s hosszát, és $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ nullterét ($\mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$). Legyen $\mathcal{U}_{s+1} = \mathcal{K}_{s+1} = \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{0}\}$, azaz e terek bázisa az üreshalmaz.
  - Minden i-re s-től 1-ig haladva:
    * Legyen $\mathbf{K}_i = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_{i+1}|\mathbf{U}_{i+1}]$.
    * Határozzuk meg $\mathbf{U}_i$-t úgy, hogy $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{U}_i]$ bázisa legyen $\mathcal{N}_i$-nek. Ehhez az $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{N}_i]$ mátrix redukált lépcsős alakja alapján válasszuk a vezéroszlopokat $\mathbf{N}_i$-ből az $\mathbf{U}_i$-be.
- Tegyük a Jordan-láncok vektorait balról jobbra egymás mellé minden láncot a sajátvektorral kezdve, az így kapott $\mathbf{P}$ mátrixszal $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Mátrixfüggvények

4.82. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix exponenciális függvényét a következő sor definiálja:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

4.83. ÁLLÍTÁS: EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA. Ha $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja, akkor

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1},$$

ahol $e^{\mathbf{J}}$ blokkonként számolható, és

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}_\lambda} = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Általában mondható, hogy

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}.$$

4.84. PÉLDA: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Legyen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2,$$

így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{e^2+1}{e^{4)}} & \frac{e^2-1}{e^4} & \frac{1}{2}\,\frac{e^2-1}{e^4} \\ \frac{1}{2}\,\frac{e^2-1}{e^4} & e^2 & \frac{1}{2}\,\frac{e^2-1}{e^4} \\ -\frac{1}{2}\,\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{1}{2}\,\frac{e^2-3}{e^4} \end{bmatrix}$$