Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 3. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

Megoldás. Jelölje $\mathbf{v}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrix k. oszlopát. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v}_k\mathbf{v}_\ell = 1$ ha $k = l$ és 0 különben.

2. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

Megoldás. Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrixok. Ekkor $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$. Hasonlóan, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

3. Önadjungáltak-e, unitérek-e a következő komplex mátrixok:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. (a) nem önadjungált, mert tisztán valós elemekből áll, de nem szimmetrikus. Nem is unitér, mert adjungáltjával (most traszponáltjaval) összeszorozva $2\mathbf{I}$-t kapunk. (b) nyilván önadjungált, de nem unitér. (c) nem önadjungált és nem is unitér.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ önadjungált.

Megoldás. $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM})^H = \mathbf{M}^H\mathbf{A}^H(\mathbf{M}^{-1})^H = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{M}^H)^H = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$.

5. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1,2,-1,0), \mathbf{a}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{a}_3 = (1,-1,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

Megoldás. Gram-Schmidt ortogonalizációval: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_2$ párhuzamos $\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$-vel, például $\mathbf{v}_2 = (4,-1,2,3)$, $\mathbf{v}_3$ párhuzamos $\mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$-vel, például $\mathbf{v}_3 = (4,-1,2,-7)$. Kaptuk tehát a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonális bázist az $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ altérben, ebből normálással adódik egy ortonormált bázis is.

6. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W \rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Megoldás. Legyen $\mathcal{B}$ bázis $V \cap W$-ben. Egészítsük ezt ki V és W egy-egy bázisává: $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ és $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ bázis $\langle V \cup W \rangle$-ben, ebből az állítás már azonnal adódik. $\mathcal{D}$ nyilván generálja $\langle V \cup W \rangle$-t. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{D}$ nem független rendszer. Ekkor elemeinek egy $\mathbf{0}$-t adó lineáris kombinációja $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ alakba vonható össze, ahol $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ és $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$, továbbá legalább egy (tehát legalább kettő) vektor nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{d} \in W$, így $\mathbf{c} \in \langle \mathcal{C} \rangle \cap V \cap W$, de $\langle \mathcal{C} \rangle \cap V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, mert $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bázisa V-nek ezért $\langle \mathcal{B} \rangle = V \cap W$ minden elemének lineáris kombinációként előállításában a $\mathcal{C}$-beli vektorok együtthatója 0, ellentmondás. Hasonlóan, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ is ellentmondásra vezet.

7. Adjuk meg az $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát. Írjuk fel az $(1,2,0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

Megoldás. 1. megoldás: Elemi térgometriával könnyen kiszámolható $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ képei ennél a lineáris transzformációnál, a leképezés mátrixa ezen képvektorokból, mint oszlopokból álló mátrix.

2. megoldás: Könnyen meggoldolható, hogy $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ bázisa S-nek. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor az ismert képlet alapjan az S-re való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

3. megoldás: A 2. gyakorlat 8. feladatának felhasználásával tudjuk, hogy az $\mathbf{a} = (1,1,1)$ vektorra merőleges hipersíkra merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor felbontását egy S-beli és egy S-re merőleges vektor összegére a $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v})$ képlet adja, ebből $(1,2,0) = (0,1,-1) + (1,1,1)$.

8. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $r(\mathbf{P}) = k$.

Megoldás. Legyen $\mathbf{P}$ egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa. Ekkor $r(\mathbf{P}) = \dim(\mathrm{Im}\mathbf{P}) = k$. A másik két követelmény helyett a velük ekvivalens $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$ egyenlőséget igazoljuk. Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek. Ekkor $(\mathbf{Pa})^T(\mathbf{b} - \mathbf{Pb}) = 0$, mert az első vektor a képtérben van a második pedig merőleges rá, továbbá

$$(\mathbf{Pa})^T(\mathbf{b}-\mathbf{Pb}) = \mathbf{a}^T\mathbf{P}^T(\mathbf{b}-\mathbf{Pb}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{b}-\mathbf{P}^T\mathbf{Pb}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{P}^T-\mathbf{P}^T\mathbf{P})\mathbf{b} = \mathbf{a}^T(\mathbf{P}-\mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b}.$$

Tehát minden $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra $\mathbf{a}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b} = 0$, de ez csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P}$ a csupa 0-t tartalmazó mátrix.

Visszafelé: Legyen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy a feltételeknek eleget tevő mátrix és legyen $S = \mathrm{Im}\mathbf{P}$. Belátjuk, hogy $\mathbf{P}$ az S-re merőleges vetítés mátrixa. Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{a}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b} = 0$, amiből az előző gondolatmenettel kapjuk, hogy $\mathbf{Pa} \perp \mathbf{b} - \mathbf{Pb}$ vagyis $\mathbf{P}$ merőleges vetítés.

Hf 1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy tetszőleges mátrix. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere megegyezik.

Hf 2. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Pontosan mikor altér $V \cup W$?