Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 6. gyakorlat

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{x}_1^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10 \ \ -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$, amiből $10x_1^2 + 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:
1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$
2. $\Rightarrow$ 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.
3. $\Rightarrow$ 1.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{x} = |\mathbf{Y}\mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

3. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

Megoldás. A főátlóban $\frac{1}{n}$, egyebütt $-\frac{1}{n(n-1)}$.

1. megoldás: A kvadratikus alak nyilván pozitív szemidefinit, hisz értéke minden $\mathbf{x}$ vektorra nemnegatív, mivel négyzetösszeg, és 0 csak akkor lehet, ha minden $x_i = \bar{x}$, azaz ha az $\mathbf{x}$ minden koordinátája azonos – ez nem csak a 0-vektorra igaz!

2. megoldás: A mátrix sajátértékei egy korábbi feladat szerint $\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} > 0$ és $\frac{1}{n} - (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = 0$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a) \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a)* a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix}, \quad x^2 - 125x + 2500, \quad \left\{\begin{matrix} \lambda_1 = 100, \ \lambda_2 = 25, \\ \sigma_1 = 10, \ \sigma_2 = 5 \end{matrix}\right\} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-ból indulva $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3$: $(1, 2, 1)$, $\lambda = 1$: $(1, 0, -1)$, $\lambda = 0$: $(1, -1, 1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{V}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\\2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6&0\\0&3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!

Megoldás. *(a)* $\begin{bmatrix}2/25&3/25\\111/650&2/325\end{bmatrix}$, *(b)* $\begin{bmatrix}-1/3&2/3\\1/3&1/3\\2/3&-1/3\end{bmatrix}$, *(d)* $\begin{bmatrix}-1/9&0&2/9\\-1/9&1/9&0\\1/6&-1/9&-1/9\end{bmatrix}$

6. Határozzuk meg az 4.*(d)*-beli mátrix polárfelbontását!

Megoldás. $\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

7. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}=\mathbf{U}\operatorname{diag}(4,-2,-2,0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&1\\2&0&1&1\\1&1&0&2\\1&1&2&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A}=\mathbf{U}\operatorname{diag}(4,2,2,0)\left(\operatorname{diag}(1,-1,-1,1)\mathbf{U}^T\right)$ az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontása, azaz $\mathbf{V}^T$ úgy kapható meg $\mathbf{U}^T$-ból, ha második és harmadik sorát -1-gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

8. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}=\mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T=\mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T=\mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Megoldás. ....

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását.

HF. Mutassuk meg, hogy az $m\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ az $\mathbb{R}^m$ merőleges vetítése az $\mathbf{A}$ oszlopterére. (Útmutatás: használjuk a redukált felbontást!)